ANNALES CORRIGEES SCIENCES PO

DE 2010 à 2013

EN MATHEMATIQUES

Sujet 0 de 2010

Entrée à Sciences Po annale 0

4 heures

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices est autorisé.
Ce problème comporte 4 parties. La partie III et la partie IV peuvent être traitées indépendamment des parties I et II.
Les résultats établis dans la partie I pourront être utilisés dans la partie II.
Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

Partie I

Dans cette partie, a est un réel strictement positif donné.

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel strictement positif par :

$$f(x) = x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right).$$

a. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et que, pour tout x réel strictement positif,

$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x+a}.$$

b. Montrer que la fonction f' est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et calculer $f''(x)$ pour tout x réel strictement positif.

c. Étudier les variations de la fonction f'.

d. Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x réel strictement positif, puis le sens de variation de la fonction f.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = \ln\left(u_n\right).$$

a. Étudier la monotonie de la suite (v_n).
En déduire celle de la suite (u_n).

b. Déterminer la limite en 0 de la fonction qui à tout x strictement positif associe $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

c. En déduire la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n).

Partie II

Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt d'une fraction d'année

On considère un capital S_0 que l'on place de différentes façons.

1. La somme S_0 est placée durant une année au taux annuel de r %, r est un réel strictement positif.

a. De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement ?

b. Application numérique :
On a un taux de 5 %($r = 5$) et $S_0 = 10000$ euros.
De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement ?

2. Soit n un entier naturel non nul. L'année est divisée en n périodes de durées égales.
La somme S_0 est placée au taux d'intérêt de $\dfrac{r}{n}$ % pour chaque période, r est un réel strictement positif.
Dans ce cas la somme S_1 placée au début de la deuxième période est la somme S_0 à laquelle on ajoute les intérêts obtenus au cours de la première période.
De même la somme S_k, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, placée au début de la $(k+1)^{\text{e}}$ période est la somme S_{k-1} à laquelle ont été ajoutés les intérêts obtenus au cours de la k^{e} période.

a. De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une période ?

b. Montrer qu'à l'issue d'une année de placement, on dispose de la somme $S_n = S_0 \times u_n$ où u_n est le terme général de la suite (u_n) définie dans la partie I pour une valeur de a que l'on donnera en fonction de r et de n.

c. Déterminer la limite de la somme S_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Interpréter ce résultat.

d. Comparer les placements des questions 1 et 2. Lequel est le plus avantageux ?

e. Application numérique : on a un taux de 5%($r = 5$), $n = 12$ et $S_0 = 10000$ euros.
Quelle somme obtient-on au bout d'une année de placement ? Retrouver le résultat du **d.**

3. Soit n un entier naturel non nul. L'année est divisée en n périodes de durées égales.
La somme S_0 est placée au taux d'intérêt de r_n % pour chacune de ces périodes, r_n est un réel strictement positif indépendant de la période considérée.

a. De quelle somme dispose-t-on au bout d'une année de placement, le principe étant le même que celui de la question 2 ?

b. On souhaite que le placement de la somme S_0 dans ce cas, rapporte autant au bout d'un an que si S_0 était placée au taux annuel de r % , c'est-à-dire comme à la question 1.
Exprimer alors r_n en fonction de r et de n.

c. Application numérique :
On a un taux de 5 %($r = 5$), $n = 12$.
Quel est le taux de placement pour chaque période dans ce cas ?

Partie III

Placements avec taux d'intérêt instantané variable

La somme S_0 est placée pour tout réel t positif au taux d'intérêt instantané $i(t)$ où t représente la durée du placement, exprimée en années.
Soit la fonction S qui à chaque réel t positif associe la somme $S(t)$, disponible au bout de t années.
On suppose que la fonction S est :
- dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$
- solution de l'équation différentielle $y' = i(t)y$.

On a $y(0) = S_0$.

1. Déterminer la fonction S lorsque la fonction i est une fonction constante sur $[0\ ;\ +\infty[$, c'est-à-dire telle qu'il existe un réel strictement positif b pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $i(t) = b$.
2. On suppose que la fonction i est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Soit I la primitive de i sur $[0\ ;\ +\infty[$ qui s'annule en 0.
   a. Exprimer $I(t)$ à l'aide d'une intégrale pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Soit φ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $\varphi(t) = \mathrm{e}^{I(t)}S(t)$.
   Montrer que φ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et calculer $\varphi'(t)$ pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_0 et de $I(t)$ pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Application numérique :
   Soit a et b deux réels strictement positifs. On pose pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$, $i(t) = b\left(1 + a\sin t\mathrm{e}^{-t}\right)$.
   a. Calculer $\displaystyle\int_0^t \sin x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, pour tout t de $[0\ ;\ +\infty[$ en utilisant le théorème d'intégration par parties.
   b. Quelle est la somme $S(t)$ obtenue au bout de t années de ce placement.

Partie IV

Un organisme financier propose un placement attractif en ce temps de crise, au taux garanti de 5 % par an comme dans l'application numérique de la partie **II - 1**.
On considère un club d'investissement dont on décide de numéroter les adhérents $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$.
Soit p un réel donné de l'intervalle $]0\ ;\ 1[$.
La personne numéro 1 décide d'investir dans ce placement et en parle à la personne numéro 2 qui fait de même avec la probabilité p ou décide de ne pas le faire avec la probabilité $q = 1 - p$.
Le processus se poursuit ainsi :
La personne numéro n informe de sa propre décision la personne numéro $(n+1)$.
La personne numéro $(n+1)$ fait le même choix que la personne numéro n avec la probabilité p ou fait le choix contraire avec la probabilité $q = 1 - p$.
Soit R_n l'évènement : « La personne numéro n investit dans le placement » et $p(R_n) = p_n$ la probabilité de cet évènement.

1. Donner la valeur de p_1.
   Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,
   $p_{n+1} = (2p-1)p_n + 1 - p$.
2. Que se passe-t-il si $p = \dfrac{1}{2}$?
3. On suppose désormais $p \neq \dfrac{1}{2}$ et on pose $w_n = p_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout entier naturel n strictement positif.
   a. Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer w_n puis p_n en fonction de n, pour tout entier naturel n strictement positif.
   c. Déterminer la limite de la suite $\left(p_n\right)$. Interpréter ce résultat.
4. Soit $p = 0,08$.
   a. Quelle est la probabilité que la 20e personne investisse dans ce placement ?
   b. Quelle est la plus petite valeur de l'entier naturel n non nul, à partir de laquelle la probabilité que la personne numéro n investisse dans le placement soit comprise entre 0,499 99 et 0,500 01 ?

Sciences Po 2010: sujet 0

Correction

Partie I

1.a). La fonction $x \mapsto 1 + \frac{a}{x}$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$ et à valeurs dans $]\,0; +\infty[$ puisque pour $a > 0$ et $x > 0$, $1 + \frac{a}{x} > 1 > 0$.

Ainsi comme la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$ alors par composition, $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$.

Enfin comme de plus $x \mapsto x$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$, alors par produit, la fonction $f : x \mapsto f(x) = x\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ est déivable sur $]\,0; +\infty[$.

Pour tout réel $x \in]\,0; +\infty[$, $f'(x) = 1 \times \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x\left(1 + \frac{a}{x}\right)} = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x + a}$.

b). On a montré que la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$.

On a aussi montré que la fonction $x \mapsto \frac{1}{a + x}$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$ donc $x \mapsto \frac{a}{a + x}$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$.

Ainsi par somme, $f' : x \mapsto f'(x) = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{a + x}$ est dérivable sur $]\,0; +\infty[$.

Pour tout réel $x \in]\,0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} - \left(-\frac{a}{(a + x)^2}\right) = -\frac{a}{(x + a)\,x} + \frac{a}{(a + x)^2} = a\left(\frac{-(a + x) + x}{x(a + x)^2}\right) = -\frac{a^2}{x(x + a)^2}$.

c). Pour tout réel $x \in]\,0; +\infty[$, $f''(x) = -\frac{a^2}{x(x + a)^2}$.

Or $a > 0$ et $x > 0$ donc $x(a + x)^2 > 0$ et ainsi $f''(x) = -\frac{a^2}{x(x + a)^2} < 0$.

Par conséquent la fonction f' est strictement décroissante sur $]\,0; +\infty[$.

d). On sait que $\lim\limits_{x \to ++\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{a}{x} = 1$.

De plus $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = 0$ par continuité de ln.

Ainsi par composition de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = 0$.

Ensuite on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x + a = +\infty$ donc par inverse de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x + a} = 0$.

Finalement par somme de limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{x + a} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

La fonction f' est strictement décroissante sur $]\,0; +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

Par suite on peut en déduire que $f'(x) \geq 0$ pour tout réel $x \in]0; +\infty[$.
La fonction f est donc croissante sur $]0; +\infty[$.

Remarque:
La fonction f' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc pour tous réels x et x' tels que $0 < x < x'$, on a donc $f'(x) > f'(x')$.
Ainsi par passage à la limite $\lim\limits_{x' \to +\infty} f(x) \geq \lim\limits_{x' \to +\infty} f(x')$.
Or $\lim\limits_{x' \to +\infty} f'(x) = f'(x)$ (indépendant de x') et $\lim\limits_{x' \to +\infty} f'(x') = 0$.
Donc $f(x) \geq 0$.
Sinon on peut aussi raisonner par l'absurde et montrer que s'il existe $f'(x) < 0$ alors f' ne peut pas être strictement décroissante.

2.a). Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = f(n)$.
Ainsi comme la fonction f est croissante sur $]0; +\infty[$ et comme pour tout entier naturel n, $n < n + 1$ et $n \in]0; +\infty[$ et $n + 1 \in]0; +\infty[$, alors on en déduit $f(n) \leq f(n + 1)$ d'où $v_n \leq v_{n+1}$.
La suite (v_n) est donc croissante.

Remarquons alors que comme pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \ln(u_n)$ alors $e^{v_n} = e^{\ln(u_n)} = u_n$.
Ainsi comme $v_n \leq v_{n+1}$ et comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient $e^{v_n} \leq e^{v_{n+1}}$ et ainsi $u_n \leq u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante.

b). On remarque que pour tout réel x, $x > 0$, $\dfrac{\ln(1 + x)}{x} = \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x}$.

On sait que la fonction ln est dérivable en 1 et que $(\ln)'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

Or par définition du nombre dérivé de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ en 1, on a $(\ln)'(1) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1)}{x}$.

On en déduit donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$(et ainsi $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$).

c). Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = n \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) = \dfrac{a}{\frac{a}{n}} \ln\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) = a \times \dfrac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}}$.

Alors comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a}{n} = 0$ et comme d'après **2.b).**, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$, alors on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = 1$ d'où

$\lim\limits_{n \to +\infty} a \times \dfrac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = a$.

Finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a$.

Enfin on a montré que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = e^{v_n}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = a \in \mathbb{R}$ et comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{v_n} = e^{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n} = e^a$.

Partie II
Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt d'une fraction d'année.

1.a). La somme S_0 est placée au taux annuel de $r\,\%$ avec $r > 0$ donc au bout d'un an de placement, la somme S_0 est multipliée par $\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)$.

On dispose donc de la somme $S_0\left(1 + \dfrac{r}{100}\right)$.

b). Pour $r = 5$ et $S_0 = 10\,000$euros, on obtient donc que la somme dont on dispose au boit d'un an de placement est $10\,000 \times \left(1 + \dfrac{5}{100}\right) = 10\,500$ euros.

2.a). Au début de chaque période, la somme placée pour la période est la somme placée la période précédente augmentée de $\dfrac{r}{n}\%$.

Au début de chaque période, la somme placée pour la période est la somme placée la période précédente multipliée par $\left(1 + \dfrac{\frac{r}{n}}{100}\right) = 1 + \dfrac{r}{100\,n}$.

Ainsi pour tout entier k, $1 \le k \le n - 1$, $S_k = S_{k-1}\left(1 + \dfrac{r}{100\,n}\right)$, puisque S_k est la somme placée au début de la $(k + 1)$-ième période et S_{k-1} la somme placée au début de la période précédente.

b). On remarque alors que comme pour $1 \le k \le n - 1$, on a $S_k = S_{k-1}\left(1 + \dfrac{r}{100\,n}\right)$, alors la suite $(S_k)_{0 \le k \le n}$ est une suite géométrique de premier terme S_0 et de raison $\left(1 + \dfrac{r}{100\,n}\right)$.

Ainsi pour tout entier $0 \le k \le n$, $S_k = S_0\left(1 + \frac{r}{100\,n}\right)^k$ et en particulier $S_n = S_0\left(1 + \dfrac{r}{100\,n}\right)^n = S_0\left(1 + \dfrac{\frac{r}{100}}{n}\right)^n$.

On pose $a = \dfrac{r}{100}$, et on obtient $S_n = S_0\, u_n$ où $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$.

c). On sait, d'après la première partie, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^a = e^{\frac{r}{100}}$ avec $a = \dfrac{r}{100}$.

Par suite, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} S_0\, u_n = S_0 \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = S_0\, e^a$.

En divisant l'année en un grand nombre de périodes aussi petite que possibles, la somme obtenue au bout d'un an de placement est presque égale à $S_0\, e^{\frac{r}{100}}$.

d). Pour le premier placement la somme obtenue au bout d'un an de placement est $S_0\left(1 + \dfrac{r}{100}\right) = S_0\, u_1$.

Pour le second placement, la somme obtenue au bout d'un an de placement, pour n périodes, est $S_0\left(1 + \dfrac{r}{100\,n}\right)^n = S_0\, u_n$.

Or on a montré que la suite (u_n) est croissante.
Donc pour tout entier naturel $n \ge 1$, $u_n \ge u_1$.
Ainsi pour tout entier naturel $n \ge 1$, $S_0\, u_n \ge S_0\, u_1$.
Ainsi le deuxième placement est toujours plus avantageux.

e). Au bout d'une année de placement, on obtient $S_{12} = 10\,000 \times \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{12} \approx 10\,511,62$ euros.
On retrouve bien que $10\,511,62 > 10\,500$ donc que le 2ième placement est plus avantageux que le premier.

3.a). Posons S_k' la somme placée au début de la $(k + 1)$-ième période pour $0 \le k \le n$.
La somme S_k' est donc la somme S_{k-1}' augmentée des intérêts générés par le taux $r_n\%$ pour $1 \le k \le n - 1$.
Ainsi pour tout k, $1 \le k \le n - 1$, on a $S_k' = S_{k-1}'\left(1 + \dfrac{r_n}{100}\right)$, suite géométrique de raison $\left(1 + \dfrac{r_n}{100}\right)$ et de premier terme S_0.

On en déduit donc, comme à la question précédente que $S_k' = S_0\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right)^k$ et donc que la somme obtenue au bout d'un an de placement, c'est à dire n périodes, est $S_n' = S_0\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right)^n$.

b). On veut donc déterminer r_n tel que $S_n' = S_0\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$, c'est à dire tel que $\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right)^n = \left(1+\dfrac{r}{100}\right)$.

On en déduit donc $n\ln\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right) = \ln\left(1+\dfrac{r}{100}\right)$ d'où $\ln\left(1+\dfrac{r_n}{100}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)}{n}$ puis $1+\dfrac{r_n}{100} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)}{n}}$ et donc $r_n = 100\left(e^{\frac{\ln\left(1+\frac{r}{100}\right)}{n}} - 1\right)$.

Remarque:

On peut aussi écrire $r_n = 100\left(\sqrt[n]{1+\dfrac{r}{100}} - 1\right)$ ou $r_n = \left(\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$.

c). On obtient $r_{12}(5\ \%) = 100\left(e^{\frac{\ln\left(1+\frac{5}{100}\right)}{12}} - 1\right) = 100\left(e^{\frac{\ln(1,05)}{12}} - 1\right) \approx 0,407$.

Partie III
Placements avec taux d'intérêt instantané variable.

1). On suppose que pour tout $t \in [0;+\infty[$, on a $i(t) = b \in \mathbb{R}$.
Par suite la fonciton S estune fonction dérivable sur $[0;+\infty[$, solution de l'équation différentielle $y' = b\,y$.
On sait donc que la fonction S est de la forme $S(t) = C\,e^{b\,t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Comme de plus $S(0) = S_0$ alors on en déduit donc $C\,e^{b\times 0} = S_0$ d'où $C = S_0$.
Ainsi S est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $S(t) = S_0\,e^{b\,t}$.

2.a). Comme i est continue sur $[0;+\infty[$, on sait que la fonction $I : t \mapsto I(t) = \int_0^t i(x)\,dx$ est l'unique primitive de i sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 0.
Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $I(t) = \int_0^t i(x)\,dx$.

b). La fonction S est dérivable sur $[0;+\infty[$ par hypothèse.
De plus comme I est une primitive de i sur $[0;+\infty[$, alors I est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $I' = i$.
Enfin la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par composée e^{-I} est dérivable sur $[0;+\infty[$ et par produit $\varphi = e^{-I}\times S$ est dérivable sur $[0;+\infty[$.
Pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, $\varphi'(t) = -i(t)\,e^{-I(t)}\,S(t) + e^{I(t)}\,S'(t) = e^{I(t)}(-i(t)\,S(t) + S'(t))$.
Or par hypothèse, S est solution de l'équation différentielle $y' = i(t)\,y$ donc $S'(t) = i(t)\,S(t)$ d'où $-i(t)\,S(t) + S'(t) = 0$.
Par suite pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\varphi'(t) = 0$.
La fonction φ est donc constante sur $[0;+\infty[$.
Ainsi pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, $\varphi(t) = \varphi(0) = e^{-I(0)}\,S(0) = e^0\,S_0 = S_0$.
On en déduit donc que pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, $e^{-I(t)}\,S(t) = S_0$ et comme $e^a \neq 0$ pour tout réel a, $S(t) = \dfrac{S_0}{e^{-I(t)}} = S_0\,e^{I(t)}$.

3.a). On a $\int_0^t \sin(x)\,e^{-x}\,dx = \int_0^t v(x)\,u'(x)\,dx$ avec $\begin{cases} v(x) = \sin(x) \\ u'(x) = e^{-x} \end{cases}$.
On obtient alors $\begin{cases} v'(x) = \cos(x) \\ u(x) = -e^{-x} \end{cases}$ avec u, v dérivables et u', v' continues sur $[0;+\infty[$, donc d'après la formule d'intégra-

tion par parties, $\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx = [-\sin(x)\, e^{-x}]_0^t + \int_0^t \cos(x)\, e^{-x}\, dx = -\sin(t)\, e^{-t} + \int_0^t \cos(x)\, e^{-x}\, dx$.

En intégrant à nouveau par parties, $\int_0^t \cos(x)\, e^{-x}\, dx = [-\cos(x)\, e^{-x}]_0^t - \int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx$.

On en déduit $\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx = -\sin(t)\, e^{t} - \cos(t)\, e^{-t} + 1 - \int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx$ d'où $2 \int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx = e^{-t}(1 - \cos(t) - \sin(t))$ et finalement $\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{-t}(1 - \cos(t) - \sin(t))$.

b). On sait que $S(t) = S_0\, e^{I(t)}$ avec $I(t) = \int_0^t i(x)\, dx$ et $i(t) = b(1 + a\sin(t)\, e^{-t})$.

On a donc $I(t) = \int_0^t b(1 + a\sin(x)\, e^{-x})\, dx = b\left(\int_0^t 1\, dx + a\int_0^t \sin(x)\, e^{-x}\, dx\right)$ par linéarité de l'intégrale.

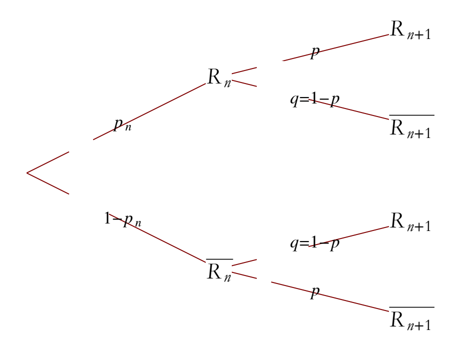
D'après la question précédente, on en déduit donc $I(t) = b\left(t + \frac{a}{2}\, e^{-t}(1 - \cos(t) - \sin(t))\right)$.

Par suite $S(t) = S_0\, e^{b\left(t + \frac{a}{2}\, e^{-t}(1 - \cos(t) - \sin(t))\right)}$.

Partie IV

1). La personne numéro 1 décide d'investir dans ce placement.
Alors $p_1 = 1$.

On a l'arbre de probabilité:



Soit un entier naturel $n \geq 1$.
Remarquons que $R_{n+1} = (R_n \cup R_{n+1}) \cap \left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right)$ et que les événements R_n et $\overline{R_n}$ sont évidemment ncompatibles.
Alors $p_{n+1} = p(R_{n+1}) = p(R_n \cap R_{n+1}) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right)$.
Par suite $p_{n+1} = p(R_n)\, p_{R_n}(R_{n+1}) + p(\overline{R_n})\, p_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

On a noté $p_n = p(R_n)$ et ainsi $p(\overline{R_n}) = 1 - p(R_n) = 1 - p_n$.

D'autre part, on sait que la personne $(n + 1)$ fait le même choix que la personne n avec la probabilité p donc $p_{R_n}(R_{n+1}) = p$ et ne fait pas le même choix avec la probabilité $1 - p$ d'où $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 1 - p$.

Finalement on obtient donc $p_{n+1} = p_n \times p + (1 - p_n)(1 - p)$ d'où $p_{n+1} = p_n \times p + 1 - p - p_n(1 - p) = p_n(p - (1 - p)) + 1 - p$ et donc $p_{n+1} = (2p - 1)\, p_n + 1 - p$.

2). On suppose $p = \frac{1}{2}$.

On obtient alors pour tout entier naturel $n > 0$, $p_{n+1} = \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right) p_n + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Ainsi $p_1 = 1$ et $p_n = \frac{1}{2}$ pour $n > 1$.

La suite (p_n) est donc stationnaire à partir du rang 2.
Le choix de la personne précédente n'a donc pas d'influence sur le choix de la personne suivante.

3.a). Soit $n > 0$.

$w_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + 1 - p - \frac{1}{2} = (2p-1)p_n + \frac{1}{2} - p.$

Remarquons alors que $\frac{1}{2} - p = -\frac{1}{2}(2p-1)$.

On obtient donc $w_{n+1} = (2p-1)p_n - \frac{1}{2}(2p-1) = (2p-1)\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = (2p-1)w_n$.

La suite (w_n) est donc géométrique de raison $(2p-1)$ et de premier terme $w_1 = p_1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

b). Comme la suite (w_n) est donc géométrique de raison $(2p-1)$ et de premier terme $w_1 = \frac{1}{2}$, alors on sait que pour tout entier naturel $n > 0$, $w_n = \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1}$.

Ensuite comme $p_n = w_n + \frac{1}{2}$, on obtient donc $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1}$ pour tout entier naturel $n > 0$.

c). On a $0 < p < 1$ donc $0 < 2p < 2$ et ainsi $-1 < 2p - 1 < 1$.

On sait alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}(2p-1)^{n-1} = 0$ et on en déduit donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} = \frac{1}{2}$c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Finalement, après qu'un grand nombre de personnes aient ou n'aient pas investi dans le placement et en aient parlé à une autre personne, la probabilité que la personne suivante décide d'investir ou non dans ce placement est égale à $\frac{1}{2}$, comme si une personne décidait d'investir ou non 1 fois sur 2, sans qu'elle tienne compte du choix de la personne qui lui en parle.

4.a). On a $p = 0,08$ et donc $p_{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2\times 0,08 - 1)^{19} \approx 0,518$.

b). On cherche l'entier n tel que $0,49\,999 \le p_n \le 0,50\,001$ donc tel que $-0,00\,001 \le \frac{1}{2}(0,16-1)^n \le 0,00\,001$ d'où tel que $-0,00\,002 \le (-0,84)^n \le 0,00\,002$.

Si n est pair on a $(-0,84)^n = 0,84^n$ donc il faut $0 < 0,84^n \le 0,00\,002$.
Si n est impair, $(-0,84)^n = -(0,84)^n$ donc il faut $-0,00\,002 \le -0,84^n < 0$ d'où $0 < 0,84^n \le 0,00\,002$.

Dans tous les cas il faut $0 < 0,84^n \le 0,00\,002$ d'où $n\ln(0,84) \le \ln(0,00\,002)$ et donc $n \ge \frac{\ln(0,00\,002)}{\ln(0,84)}$ puisque $\ln(0,84) < 0$.

Comme $\frac{\ln(0,00\,002)}{\ln(0,84)} > 62$ et n est un entier naturel, on en déduit que le plus entier naturel tel que $-0,49\,999 \le p_n \le 0,50\,001$ est $n = 63$.

Entrée à Sciences Po
4 heures

Le problème se compose de 5 parties.
Les calculatrices sont autorisées.
Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursun l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Problème

Le problème examine différents aspects de l'utilisation d'un ensemble de fonctions introduit dans la partie III et motivé dans la partie II.
À ce fil conducteur près, on peut considérer les parties comme indépendantes, mais les résultats de la partie I sont utiles dans la partie II.

I. Des arcs d'hyperboles

À tout réel m élément du segment $[0\,;\,1]$, on associe la fonction f_m, définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f_m(x) = \frac{m}{1-x},$$

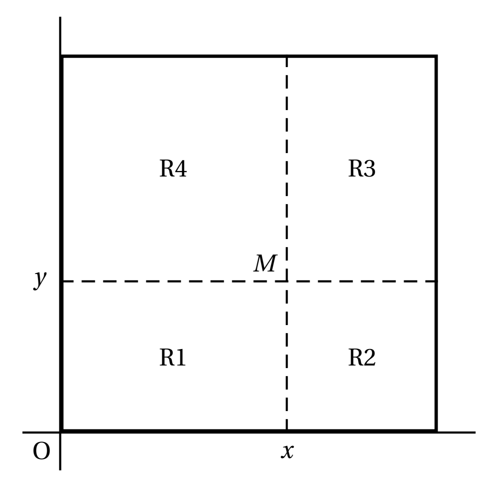
et la fonction g_m définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par :

$$g_m(x) = -\frac{m}{x}.$$

1. Quel est le sens de variation de chacune des fonctions f_m et g_m ?
2. Résoudre les équations :
$$f_m(x) = 1 \quad \text{et} \quad g_m(0) = 0.$$
3. Pour quelles valeurs du réel m l'équation $g_m(x) = f_m(x)$ a-t-elle des solutions ?
4. Représenter sur un même graphique les fonctions f_m et g_m. On distinguera plusieurs cas, selon le nombre de solutions de l'équation précédente et on fera une figure illustrant chaque cas.

II. Des lignes de niveau

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère le carré unité OIDJ. Pour chaque point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ intérieur au carré, les parallèles aux axes du repère déterminent quatre rectangles marqués R1, R2, R3 et R4.



1. Exprimer, en fonction des coordonnées de M, les aires des rectangles R1, R2, R3 et R4.
2. On note $A(x\,;\,y)$ la plus grande des aires obtenues.
Pourquoi est-on assuré que $\frac{1}{4} \leqslant A(x\,;\,y) \leqslant 1$?

3. Montrer que, pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de réels de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $A(x\ ;\ y) = A(y\ ;\ x)$.

4. Résoudre dans $[0\ ;\ 1]$ l'inéquation $t \geqslant 1-t$. En déduire une expression explicite de $A(x\ ;\ y)$ en fonction de x et y (on distinguera quatre cas).

5. Pour tout réel m du segment $\left[\dfrac{1}{4}\ ;\ 1\right]$, on note L_m la ligne de niveau m de l'application A c'est-à-dire l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient $A(x\ ;\ y) = m$.

a. Déterminer – en utilisant la distinction en quatre cas précédente – une équation de la ligne de niveau L_m.

b. Tracer sur un même graphique les lignes de niveau $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{4}$.

III. Étude d'un ensemble de fonctions affines par morceaux

Pour tout couple $(t\ ;\ x)$ de réels compris entre 0 et 1, on pose :

$$\begin{array}{rcll} K(t\ ;\ x) & = & x(1-t) & \text{si} \quad x \leqslant t \\ K(t\ ;\ x) & = & t(1-x) & \text{si} \quad x > 1 \end{array}$$

1. Résoudre l'équation $K(t\ ;\ x) = 0$.

2. On donne un réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

a. Étudier la fonction k_t, définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$k_t(x) = K(t\ ;\ x).$$

b. Montrer que la fonction k_y, présente un maximum.

3. En déduire qu'il existe un couple $(t_0\ ;\ x_0)$ de réels compris entre 0 et 1 tel que, pour tout couple $(t\ ;\ x)$ de réels compris entre 0 et 1, on ait : $K(t_0\ ;\ x_0) \geqslant K(t\ ;\ x)$.

IV. Un noyau pour transformer des fonctions

Dans cette partie, la fonction K, composée d'une certaine manière avec des fonctions, permet de leur associer d'autres fonctions. On reprend la notation de la partie III et, à toute fonction f définie et continue sur le segment $[0\ ;\ 1]$, on associe la fonction $\widehat{f}$ définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$\widehat{f} = \int_0^1 K(t\ ;\ x) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 k_t(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 K(t\ ;\ x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t (1-t)x\,\mathrm{d}x + \int_t^1 t(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Calculer $h(t) = \displaystyle\int_0^1 K(t\ ;\ x)\mathrm{d}x$. (On pourra interpréter $h(t)$ comme une aire)

2. On appelle s la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$s(x) = \sin(2\pi x).$$

Déterminer la fonction $\widehat{s}$. (On pourra utiliser le procédé d'intégrations par parties).

On note E l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[0\ ;\ 1]$ et prenant la valeur 0 en 0 et 1.

3. Montrer que, pour toute fonction g appartenant à E, on a aussi $\widehat{g}(0) = \widehat{g}(1) = 0$.

4. Montrer que, pour toute fonction f appartenant à E, la fonction $\widehat{f}$ admet une dérivée seconde.
Exprimer $\left(\widehat{f}\right)''$ en fonction de f.

5. Soit g une fonction appartenant à E. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $f'' = g$ appartenant elles aussi à E ? Combien y en a-t-il ?

V. . . . et pour construire une suite

Soit t un réel donné dans l'intervalle $]0~;~1[$. On considère la suite (x_n) définie par son premier terme $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel} n \left\{\begin{array}{l c l} x_{2n+1} & = & t(1 - x_{2n})\\ x_{2n+2} & = & (1-t)x_{2n+1}\end{array}\right.$$

1. On pose, pour tout entier naturel n, $y_n = x_{2n+1}$.
Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n.
Prouver l'existence de deux nombres réels α et β tels que, pour tout entier naturel n, on puisse écrire :

$$y_{n+1} - \beta = \alpha\left(y_n - \beta\right)$$

2. La suite $\left(y_n\right)$ est-elle convergente ? Justifier la réponse.

3. On pose, de la même manière, pour tout entier naturel n, $z_n = x_{2n}$.
La suite (z_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

4. La suite (x_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Épreuve de Mathématiques, Session 2010

Correction

Problème

I. Des arcs d'hyperboles

1. Distinguons le cas $m = 0$.
Pour $m = 0$, $f_0(x) = 0$ et $g_0(x) = 1$ donc les fonctions f_0 et g_0 sont constantes.

Soit $m \in]0; 1]$.

La fonction $x \mapsto 1 - x$ est strictement décroissante sur $[0; 1[$ à valeurs dans $]0; 1]$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ donc par composition $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est strictement croissante sur $[0; 1[$ et comme $m > 0$, alors $f_m : x \mapsto \dfrac{m}{1-x}$ est strictement croissante sur $[0; 1[$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $]0; 1]$ à valeurs dans $[1; +\infty[$ et la fonction $x \mapsto 1 - mx$ est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ puisque $m > 0$.
Alors par composition, $g_m : x \mapsto 1 - \dfrac{m}{x}$ est strictement croissante sur $]0; 1]$.

Remarque:
On peut bien sur aussi dériver chacune des deux fonctions:
$f_m{}'(x) = -\left(\dfrac{-1}{(1-x)^2}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$ pour $x \in [0; 1[$ et $g_m{}'(x) = -\left(-\dfrac{m}{x^2}\right) = \dfrac{m}{x^2} > 0$ pour $x \in]0; 1]$.

2. Distinguons à nouveau le cas $m = 0$.
Comme $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in [0; 1[$ alors $f_0(x) = 1$ n'admet pas de solution sur $[0; 1[$.
Comme $g_0(x) = 1$ pour tout $x \in]0; 1]$, alors $g_0(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; 1]$.

Soit $m \in]0; 1]$.

On résout $f_m(x) = 1$.

On a donc $\dfrac{m}{1-x} = 1$ d'où $\dfrac{m-(1-x)}{1-x} = 0$ et donc pour $x \neq 1$, il faut $x + (m-1) = 0$ d'où $x = -m + 1$.
Comme pour tout réel $m \in [0; 1]$, $-1 \leq m \leq 0$ alors $0 \leq 1 - m \leq 1$, l'équation $f_m(x) = 1$ admet une unique solution sur $[0; 1[$, $x_{f\,m} = 1 - m$.

On résout $g_m(x) = 0$ c'est à dire $1 - \dfrac{m}{x} = 0$ d'où $\dfrac{x-m}{x} = 0$ et comme $x \neq 0$ alors il faut $x - m = 0$ d'où $x = m$ et comme $m \in]0; 1]$, la solution est toujours valide.
L'équation $g_m(x) = 0$ admet dnc pour unique solution sur $]0; 1]$, $x_{g\,m} = m$.

3. Résolvons $f_m(x) = g_m(x)$.

Considérons le cas $m = 0$.
On a $f_0(x) = 0$ et $g_0(x) = 1$ donc l'équation $f_0(x) = g_0(x)$ n'a pas de solution.

Soit $m \neq 0$, alors $0 < m \leq 1$.
On résout donc $\dfrac{m}{1-x} = 1 - \dfrac{m}{x}$ d'où $\dfrac{mx + m(1-x) - x(1-x)}{x(1-x)} = 0$ et donc $\dfrac{x^2 - x + m}{x(1-x)} = 0$.

Ainsi pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$, il faut $x^2 - x + m = 0$.

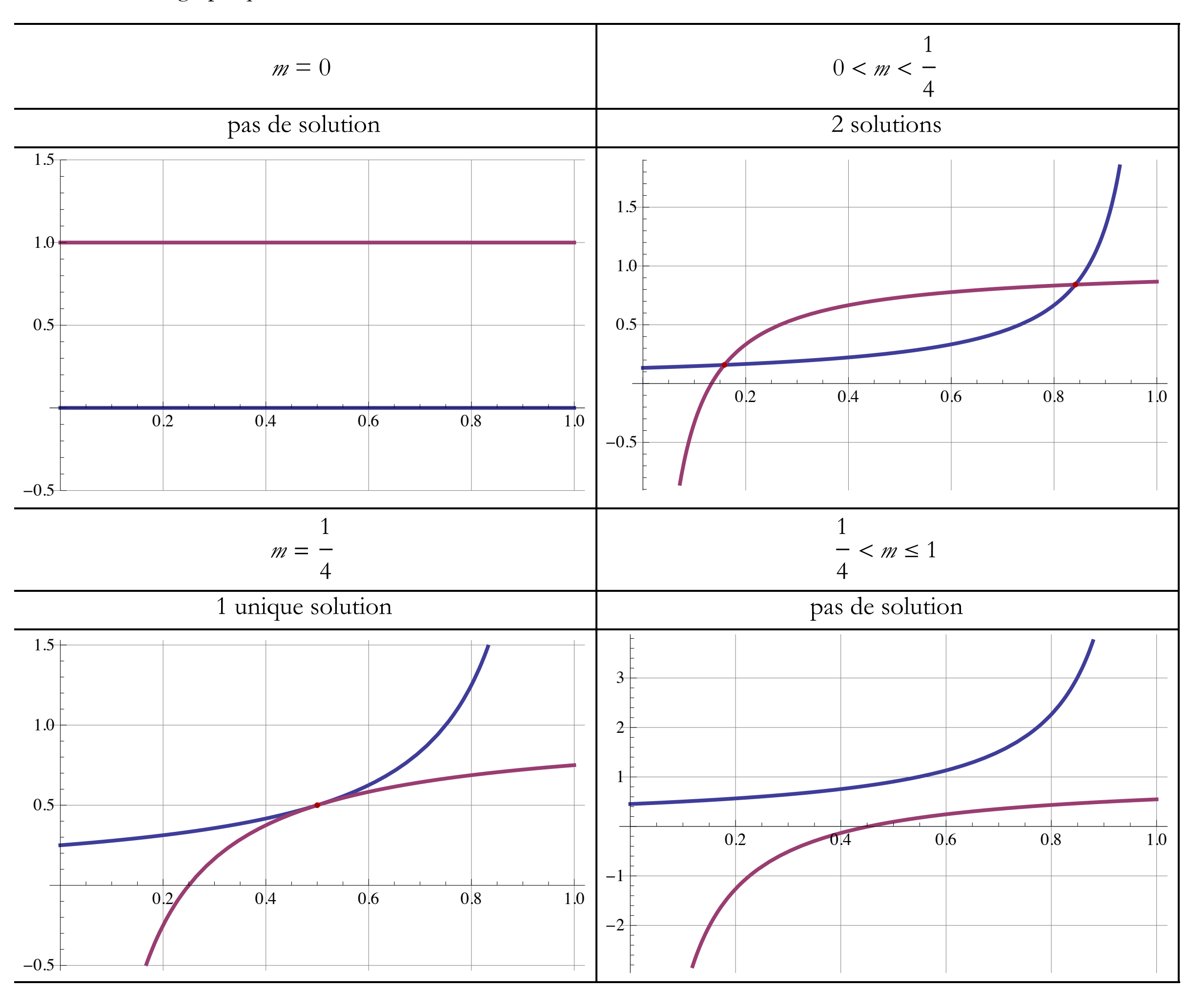
L'équation du second degré $x^2 - x + m = 0$ admet pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4\,m = \left(1 - 2\sqrt{m}\right)\left(1 + 2\sqrt{m}\right)$.

Le signe de ce discriminant est le signe de $1 - 2\sqrt{m}$ puisque $m \in [0; 1]$ et donc $1 + 2\sqrt{m} > 0$.

Or $1 - 2\sqrt{m} > 0$ si $1 > 2\sqrt{m}$ d'où $\sqrt{m} < \frac{1}{2}$ et donc comme $m > 0$, si $0 \leq m < \frac{1}{4} < 1$.

On en déduit donc que l'équation $f_m(x) = g_m(x)$ admet 2 solutions si $m \in \left]0; \frac{1}{4}\right]$, 1 solution si $m = \frac{1}{4}$ et aucune solution si $m \in \{0\} \bigcup \left]\frac{1}{4}; 1\right]$.

4. On obtient le graphique:



II. Des lignes de niveau

1. Pour R_1: le rectangle R_1 a pour dimensions x et y donc son aire A_1 est donnée par $A_1(x;y) = A_{R_1}(x;y) = x\,y$.

Pour R_2: le rectangle R_2 a pour dimension $1-x$ et y donc son aire A_2 est donnée par $A_2(x;y) = A_{R_2}(x;y) = (1-x)\,y$

Pour R_3: le retcangle R_3 a pour dimension $1-x$ et $1-y$ donc son aire A_3 est donnée par $A_3(x;y) = A_{R_3}(x;y) = (1-x)\,(1-y)$

Pour R_4: le rectangle R_4 a pour dimension x et $1-y$ donc son aire A_4 est donnée par $A_4(x;y) = A_{R_4}(x;y) = x(1-y)$.

2. On note $A(x;y)$ la plus grande des aires obtenues.

Les 4 rectangles sont inclus dans le carré *OIDJ* d'aire 1 donc on a forcément $A(x;y) \leq 1$.

La somme des 4 aires est égale à 1: on a $\sum_{i=1}^{4} A_i(x;y) = 1$

Alors si $A(x;y) < \frac{1}{4}$, comme $A_i(x;y) \leq A(x;y)$ pour $i \in \{1;2;3;4\}$, on obtient $\sum_{i=1}^{4} A_i(x;y) < 4 \times \frac{1}{4}$ d'où $\sum_{i=1}^{4} A_i(x;y) < 1$: absurde.

Par suite $A(x;y) \geq \frac{1}{4}$.

On peut donc assuré $\frac{1}{4} \leq A(x;y) \leq 1$.

Remarque:
Si $x = 1$ ou $y = 1$, alors on a $A(x;y) = 1$.
Si $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{2}$, alors on a $A(x;y) = \frac{1}{4}$.

3. Soit $(x;y)$ un couple de réels de l'intervalle $[0;1]$.
Remarquons que:

- $A_1(y;x) = y\,x = A_1(x;y)$
- $A_2(y;x) = (1-y)\,x = A_4(x;y)$
- $A_3(y;x) = (1-y)\,(1-x) = A_1(x;y)$
- $A_4(y;x) = y(1-x) = A_2(x;y)$.

Par suite
$A(y;x) = \mathrm{Max}(A_1(y;x); A_2(y;x); A_3(y;x); A_4(y;x)) = \mathrm{Max}(A_3(x;y); A_4(x;y); A_1(x;y); A_2(x;y)) = A(x;y)$.

4. L'inéquation $t \geq 1-t$ donne $2\,t \geq 1$ d'où $t \geq \frac{1}{2}$.

Donc $t \geq 1-t$ avec $t \in [0;1]$ si $t \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

Avec $y \in]\,0;1]$, $x\,y \geq (1-x)\,y$ si et seulement si $x \geq 1-x$ donc d'après le résultat précédent si $x \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi pour $y \in]\,0;1]$, $A_1(x;y) \geq A_2(x;y)$ pour $x \geq \frac{1}{2}$.

On peut remarquer que l'inégalité est encore vraie pour $y = 0$.

Avec $x \in]\,0;1]$, $x\,y \geq x(1-y)$ si et seulement si $y \geq 1-y$ donc si $y \geq \frac{1}{2}$.

Ainsi pour $x \in]\,0;1]$, $A_1(x;y) \geq A_4(x;y)$ si $y \geq \frac{1}{2}$.

Remarquons que l'inégalité est vraie pour $x = 0$.

De même, on montre que $A_4(x;\,y) \geq A_3(x;\,y)$ pour $y \geq \frac{1}{2}$ quel que soit $x \in [0;\,1]$ et que $A_2(x;\,y) \geq A_3(x;\,y)$ pour $x \geq \frac{1}{2}$ quel que soit $y \in [0;\,1]$.

On en déduit $A(x;\,y) = \begin{cases} A_1(x;\,y) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ A_2(x;\,y) \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \\ A_3(x;\,y) \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ A_4(x;\,y) \text{ pour } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ d'où

$$A(x;\,y) = \begin{cases} x\,y \text{ pour } (x;\,y) \in \left[\frac{1}{2};\,1\right] \times \left[\frac{1}{2};\,1\right] \\ (1-x)\,y \text{ pour } (x;\,y) \in \left[0;\,\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2};\,1\right] \\ (1-x)\,(1-y) \text{ pour } (x;\,y) \in \left[0;\,\frac{1}{2}\right] \times \left[0;\,\frac{1}{2}\right] \\ x(1-y) \text{ pour } (x;\,y) \in \left[\frac{1}{2};\,1\right] \times \left[0;\,\frac{1}{2}\right] \end{cases}.$$

5. Pour tout réel m du segment $\left[\frac{1}{4};\,1\right]$, on note L_m la ligne de niveau m de l'application A, c'est à dire l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient $A(x;\,y) = m$.

a. Soit $m \in \left[\frac{1}{4};\,1\right]$.

On résout $A(x;\,y) = m$.

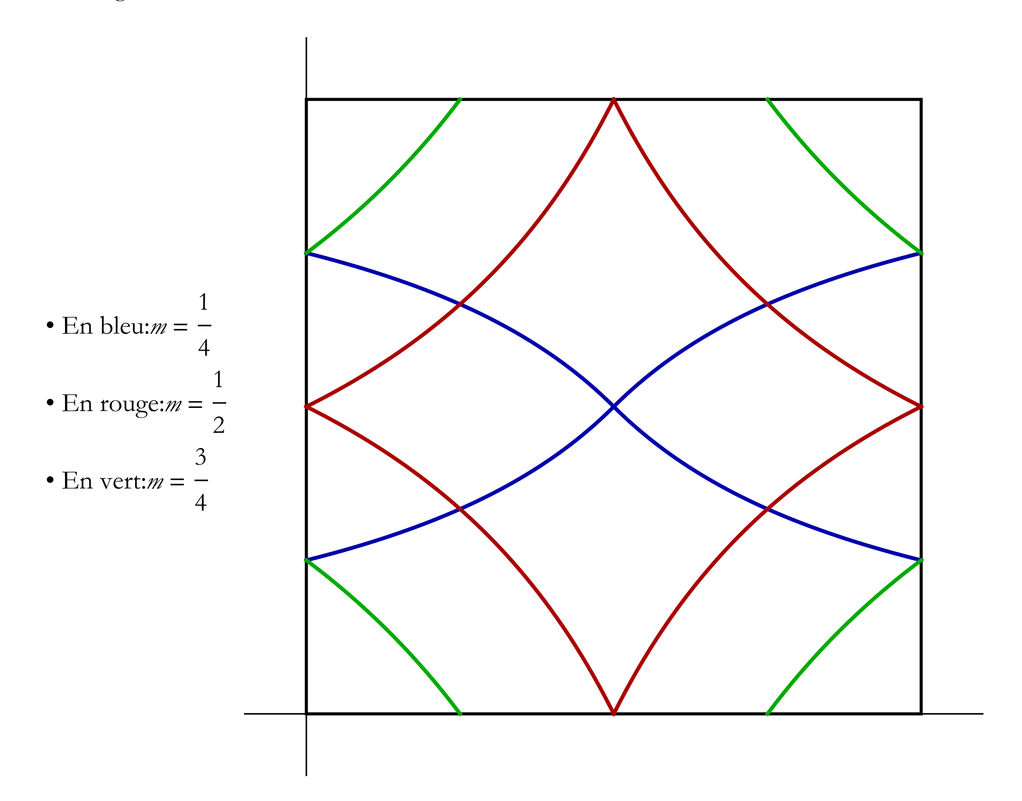
Pour $(x;\,y) \in \left[\frac{1}{2};\,1\right] \times \left[\frac{1}{2};\,1\right]$, on obtient $x\,y = m$ d'où $y = \frac{m}{x}$.

Pour $(x;\,y) \in \left[0;\,\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2};\,1\right]$, on obtient $(1-x)\,y = m$ d'où $y = \frac{m}{1-x}$.

Pour $(x;\,y) \in \left[0;\,\frac{1}{2}\right] \times \left[0;\,\frac{1}{2}\right]$, on obtient $(1-x)\,(1-y) = m$ d'où $y = 1 - \frac{m}{1-x}$.

Pour $(x;\,y) \in \left[\frac{1}{2};\,1\right] \times \left[0;\,\frac{1}{2}\right]$, on obtient $x\,(1-y) = m$ d'où $y = 1 - \frac{m}{x}$.

b. On obtient les lignes de niveaux:



III. Étude d'un ensemble de fonctions affines par morceaux

1. Si $x \leq t$, on résout donc $x(1-t)=0$ d'où $x=0$ ou $1-t=0$ et donc il faut $x=0 \leq t$ ou $t=1$.
Si $x > t$, on résout $t(1-x)=0$ d'où $t=0$ ou $1-x=0$ et donc il faut $t=0$ ou $x=1$.

Par conséquent $K(t;x)=0$ pour les couples $(0;t)$, $t \in [0;1]$, $(x;1)$, $x \in [0;1]$, $(1;t)$, $t \in [0;1]$ et $(x;0)$, $x \in [0;1]$.
Donc $K(t;x)=0$ sur pour tout couple $(x;t)$ tel que le point de coordonnées $(x;t)$ soit un point des côtés du carré $OIDJ$, de la **partie II**.

2. On donne un réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

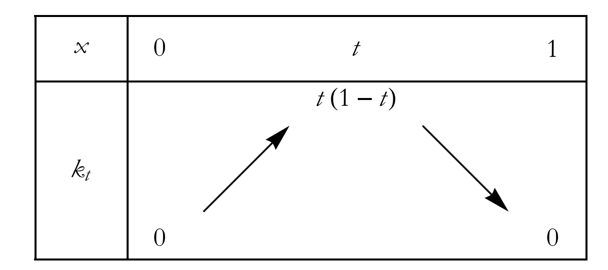
a. Soit $t \in]0;1[$.
Comme $1-t>0$, alors la fonction k_t est strictement croissante sur $[0;t]$.
Comme $t \geq 0$, $-t \leq 0$, alors la fonction $k_t : x \mapsto -tx+t$ est strictement décroissante sur $[t;1]$.

Pour $t=0$, $k_0 : x \mapsto 0$: la fonction est constante égale à 0 et pour $t=1$, $k_1 : x \mapsto 0$, la fonction est constante égale à 0.

Remarquons que $\lim\limits_{x \to t^+} k_t(x) = t(1-t) = k_t(t)$ donc la fonction k_t est continue en t.

Comme elle est trivialement continue sur $[0;t[$ et sur $]t;1]$, elle est donc continue sur $[0;t]$.

On a le tableau de variation pour $t \in]0;1[$:



b. Pour $t=0$ ou $t=1$, la fonction k_t est constante égale à 0 donc elle présente un maximum égal à 0.

Soit $t \in]0;1[$.
La fonction k_t est strictement croissante sur $[0;t]$ donc pour tout réel $x \in [0;t]$, $k_t(x) \leq k_t(t)$.
La fonction k_t est strictement décroissante sur $[t;1]$ donc pour tout réel $x \in [t;1]$, $k_t(x) \leq k_t(t)$.
Dans tous les cas, $k_t(x) \leq k_t(t)$ donc la fonciton présente un maximum égal à $k_t(t) = t(1-t)$ atteint en $x=t$.

3. Considérons la fonction $k : t \mapsto k_t(t) = t(1-t)$ pour $t \in [0;1]$.
C'est une fonction du second degré ayant pour racines 0 et 1, dont le coefficient des termes au carré est $-1<0$ donc on sait que cette fonction admet un maximum atteint pour $t_0 = -\dfrac{1}{2\times(-1)} = \dfrac{1}{2}$ égal à $k\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$.

On a donc montré que pour tout couple de réels $(t;x) \in [0;1]\times[0;1]$, $K(t;x) \leq K(t;t)$ et pour tout réel $t \in [0;1]$, $K(t;t) \leq K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Ainsi pour tout couple $(t;x)$ de réels compris entre 0 en 1, on ait $K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right) \geq K(t;x)$.

On pose $(t_0;x_0) = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$, et donc on a montré qu'il existe un couple $(t_0;x_0)$ de réels compris entre 0 et 1 tel que pour tout couple $(t;x)$ de réels compris entre 0 en 1, on ait $K(t_0;x_0) \geq K(t;x)$.

IV. Un noyau pour transformer des fonctions

1. Puisque $K(t;x) = \begin{cases} (1-t)\,x \text{ pour } 0 \le x \le t \\ x(1-t) \text{ pour } t < x \le 1 \end{cases}$ et comme d'après la relation de Chasles pour tout $t \in [0;1]$,

$\int_0^1 K(t;x)\,dx = \int_0^t K(t;x)\,dx + \int_t^1 K(t;x)\,dx$, alors on obtient

$\int_0^1 K(t;x)\,f(x)\,dx = \int_0^t (1-t)\,x\,dx + \int_t^1 t(1-x)\,dx$.

On a alors pour tout $t \in [0;1]$, $h(t) = \int_0^1 K(t;x)\,dx = \int_0^t (1-t)\,x\,dx + \int_t^1 t(1-x)\,dx = (1-t)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^t + t\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_t^1$

d'où $h(t) = (1-t)\,\frac{t^2}{2} + t\left(-\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\,(t - t^2)$.

Remarque:
Comme pour tout couple $(t;x)$ de réels compris entre 0 et 1, la fonction $K(t;x)$ est positive, alors pour tout réel $t \in [0;1]$, $h(t)$ est l'aire sous la courbe de k_t sur l'intervalle $[0;1]$.
La fonction k_t est une fonction affine par morceaux, l'aire sous la courbe k_t sur $[0;1]$ est l'aire d'un triangle isocèle de base 1 et de hauteur $t(1-t)$ et est donc donnée par $h(t) = \frac{1 \times t(1-t)}{2} = \frac{1}{2}\,t(1-t)$.

2. On appelle s la fonction définie sur $[0;1]$ par $s(x) = \sin(2\pi x)$.

On a $\hat{s}(t) = \int_0^1 K(t;x)\,s(x)\,dx = (1-t)\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx + t\int_t^1 (1-x)\sin(2\pi x)\,dx = .$

$$(1-t)\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx - t\int_t^1 x\sin(2\pi x)\,dx + t\int_t^1 \sin(2\pi x)\,dx$$

Soit a et b deux réels.

Alors la formule d'intégration par parties donne

$\int_a^b x\sin(2\pi x)\,dx = \left[x \times \left(-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right)\right]_a^b - \int_a^b 1 \times \left(\frac{-\cos(2\pi x)}{2\pi}\right)dx$.

Par suite $\int_a^b x\sin(2\pi x)\,dx = -\frac{b}{2\pi}\cos(2\pi b) + \frac{a}{2\pi}\cos(2\pi a) + \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi b) - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi a)$.

On en déduit $\int_0^t x\sin(2\pi x)\,dx = -\frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) + \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)$ et

$\int_t^1 x\sin(2\pi x)\,dx =$.

$$-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi) + \frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) + \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi) - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t) = -\frac{1}{2\pi} + \frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)$$

De plus $\int_t^1 \sin(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{1}{2\pi}$.

On obtient

$$\hat{s}(t) = (1-t)\left(-\frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) + \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)\right) - t\left(-\frac{1}{2\pi} + \frac{t}{2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)\right) + t\left(\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) - \frac{1}{2\pi}\right)$$

D'où finalement $\hat{s}(t) = \frac{1}{4\pi^2}\sin(2\pi t)$.

4. La fonction f est continue sur $[0;1]$. Par suite la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(u)\,du$ est définie sur $[0;1]$ et est la primitive de f qui s'annule en 0.
Rappelons que $F'(x) = f(x)$ pour tout réel $x \in [0;1]$.

On a:

$\hat{f}(t) = \displaystyle\int_0^1 K(t;x)\, f(x)\, dx$

$\hat{f}(t) = (1-t)\displaystyle\int_0^t x\, f(x)\, dx + t\displaystyle\int_t^1 (1-x)\, f(x)\, dx$

$\hat{f}(t) = \displaystyle\int_0^t x\, f(x)\, dx - t\displaystyle\int_0^t x\, f(x)\, dx + t\displaystyle\int_t^1 f(x)\, dx - t\displaystyle\int_t^1 x\, f(x)\, dx$

$\hat{f}(t) = \displaystyle\int_0^t x\, f(x)\, dx - t\displaystyle\int_0^1 x\, f(x)\, dx + t\displaystyle\int_t^1 f(x)\, dx$

Calculons à l'aide d'une intégration par parties $\displaystyle\int_a^b x\, f(x)\, dx$ avec a et b des réels de l'intervalle $[0; 1]$.

On obtient $\displaystyle\int_a^b x\, f(x)\, dx = [x\, F(x)]_a^b - \int_a^b 1 \times F(x)\, dx = b\, F(x) - a\, F(a) - \int_a^b F(x)\, dx$.

Remarquons que $\displaystyle\int_a^b F(x)\, dx$ est bien définie pouisque F est continue sur $[0; 1]$ car dérivable sur $[0; 1]$.

Ainsi, $\hat{f}(t) = \left(t\, F(t) - 0 \times F(0) - \displaystyle\int_0^t F(x)\, dx\right) - t\left((F(1) - F(0)) - \displaystyle\int_0^1 F(x)\, dx\right) + t(F(1) - F(t))$.

Rappelons que $F(0) = 0$ et donc $\hat{f}(t) = t\displaystyle\int_0^1 F(x)\, dx - \int_0^t F(x)\, dx$.

La fonction $t \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 F(x)\, dx\right) t$ est une fonction linéaire donc elle est deux fois dérivable sur $[0; 1]$ et sa dérivée seconde est la fonction nulle.

La fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t F(x)\, dx$ est dérivable sur $[0; 1]$ puisque F est continue sur $[0; 1]$ et sa dérivée est la fonction $t \mapsto F(t)$.

Comme de plus F est une primitive de f, alors F est dérivable sur $[0; 1]$ de dérivée f et on en déduit que la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^t F(x)\, dx$ est deux fois dérivable sur $[0; 1]$ et que sa dérivée seconde est la fonction $t \mapsto f(t)$.

Par conséquent $\hat{f}$ admet une dérivée seconde sur $[0; 1]$ comme somme de fonctions qui admettent des dérivées secondes sur $[0; 1]$.

De plus $\left(\hat{f}\right)''(t) = 0 - f(t) = -f(t)$ pour tout $t \in [0; 1]$.

5. Soit g une fonction appartenant à E.

On a montré que quelle que soit la fonction f de E, la fonction $\hat{f}$ est aussi une fonction de E.

En effet la fonction $\hat{f}$ est définie et continue (puisque dérivable) sur $[0; 1]$ et de plus $\hat{f}(0) = \hat{f}(1) = 0$.

De plus on a montré que $\left(\hat{f}\right)'' = -f$.

On peut donc en déduire que la fonction $-\hat{g}$ est une solution appartenant à E de l'équation différentielle $f'' = g$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $f'' = g$ appartenant elles aussi à E ? Combien y en a t-il ?

Soit φ une autre solution de cette équation différentielle.

Alors on a $\left(\varphi - \left(-\hat{g}\right)\right)'' = \varphi'' + \left(\hat{g}\right)'' = g - g = 0$: la fonction $\left(\varphi - \left(-\hat{g}\right)\right)'$ est donc constante.

Il existe un réel k tel que $\left(\varphi - \left(-\hat{g}\right)\right)'(t) = k\, t$ pour tout $t \in [0; 1]$.

Finalement il existe une constante réelle c telle que $\left(\varphi - \left(-\hat{g}\right)\right)(t) = k\, t + c$ pour tout $t \in [0; 1]$ donc $\varphi(t) = -\hat{g}(t) + k\, t + c$.

Remarquons de plus que toute fonction de la forme $\varphi : t \mapsto \varphi(t) = -\hat{g}(t) + k\, t + c$ pour $t \in [0; 1]$ est solution de

l'équation différentielle $f'' = g$ puisque $\varphi'' = -\left(\hat{g}\right)'' = -(-g) = g$.

On en déduit qu'une solution de l'équation différentielle $f'' = g$ est de la forme $\varphi(t) = -\hat{g}(t) + k\,t + c$ avec k et c constante réelle.
Pour que φ appartienne à E, il faut $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.
Or $\varphi(0) = c$ d'où $c = 0$ et $\varphi(1) = k$ d'où $k = 0$.
Alors $\varphi(t) = -\hat{g}(t)$ pour tout $t \in [0; 1]$.

Il y a donc une unique solution appartenant à E à l'équation différentielle $f'' = g$, c'est la fonction $-\hat{g}$.

V. … et pour construire une suite

1. On pose, pour tout entier naturel n, $y_n = x_{2n+1}$.
Soit n un entier.
On a $y_{n+1} = x_{2(n+1)+1} = t(1 - x_{2(n+1)}) = t(1 - x_{2n+2}) = t(1 - (1 - t)\,x_{2n+1}) = t(1 - (1 - t)\,y_n)$.

Prouver l'existence de deux nombres réels α et β tels que, pour tout entier naturel n, on puisse écrire $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$.

On a $y_{n+1} = t(1 - (1 - t)\,y_n) = t + (t^2 - t)\,y_n$.
On cherche des réels α et β tels que $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$ donc tels que $y_{n+1} = \beta(1 - \alpha) + \alpha\, y_n$.

Il faut donc $\begin{cases} \alpha = t^2 - t \\ \beta(1 - \alpha) = t \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \alpha = t^2 - t \\ \beta = \dfrac{t}{1 + t - t^2} \end{cases}$.

Pour tout réel $t \in [0; 1]$, α et β sont bien définis.
Pour α, c'est trivial, pour β, vérifions que $1 + t - t^2 > 0$ pour tout réel $t \in [0; 1]$.
On sait que pour tout réel $t \in [0; 1]$, $0 \le t^2 \le t$ d'où $t - t^2 \ge 0$ et donc $1 + t - t^2 \ge 1 > 0$.
Le réel β est bien défini pour tout réel $t \in [0; 1]$.

En posant $\alpha = t^2 - t$ et $\beta = \dfrac{t}{1 + t - t^2}$, on a alors $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$ pour tout entier naturel n, pour tout réel $t \in [0; 1]$.

2. Comme pour tout entier naturel n, $y_{n+1} - \beta = \alpha(y_n - \beta)$, alors la suite $((y_n - \beta))$ est géométrique de raison α et de premier terme $y_0 - \beta = t(1 - t) - \dfrac{t}{1 + t - t^2} = \dfrac{-2\,t^3 + t^4}{1 + t - t^2} = -\dfrac{t^3(t - 2)}{1 + t - t^2}$.

Pour tout entier naturel n, on a donc $y_n - \beta = (y_0 - \beta)\,\alpha^n$.

Or comme $t \in [0; 1]$, $-1 < t^2 - t \le 0$.
En effet la fonction $t \mapsto t^2 - t$ est une fonction du second degré dont les racines sont 0 et 1 et le coefficient des termes au carré est 1 donc on sait qu'elle est décroissante sur $\left[0; \dfrac{-1}{2\times(-1)}\right] = \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; 0\right]$.

Ainsi elle admet un minimum égal à $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$ sur $[0; 1]$ atteint pour $x = \dfrac{1}{2}$ et est majorée par $0^2 = 0 = 1^2 - 1 = 0$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$ et ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n - \beta = 0$: par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta$: la suite (y_n) est convergente et sa limite est $\beta = \dfrac{t}{1 + t - t^2}$.

3. Remarquons que $z_{n+1} = x_{2n+2} = (1 - t)\,x_{2n+1} = (1 - t)\,t(1 - x_{2n}) = (1 - t)\,t(1 - z_n) = (t - t^2)\,(1 - z_n) = (t - t^2) + (t^2 - t)\,z_n$.

Déterminons des réels γ et δ tels que $z_{n+1} - \delta = \gamma(z_n - \delta)$.

Les réels γ et δ vérifient $z_{n+1} = \gamma\, z_n + \delta(1 - \gamma)$ et donc il faut $\begin{cases} \gamma = t^2 - t = \alpha \\ \delta = \dfrac{t - t^2}{1 + t - t^2} = (1 - t)\,\beta \end{cases}$.

Les réels γ et δ sont bien définies.

La suite $(z_n - \delta)$ est géométrique de raison $\gamma = \alpha$ et de premier terme $z_0 - \delta = t - \dfrac{t - t^2}{1 + t - t^2} = -\dfrac{t^2(t - 2)}{1 + t - t^2}$.

Alors pour tout entier naturel n, $z_n - \delta = (z_0 - \delta)\,\alpha^n$.
On déduit de la question précédente que (z_n) est convergente et a pour limite $\delta = (1 - t)\,\beta$.

4. On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = (1 - t)\,\beta$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1} = \beta$.
Or si la suite (x_n) est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{2n+1}$ donc il faut $(1 - t)\,\beta = \beta$ d'où $t\,\beta = 0$ c'est à dire

$\dfrac{t^2}{1+t-t^2} = 0$ et donc $t = 0$.

Finalement, sauf pour $t = 0$, la suite (x_n) n'est pas convergente.

Entrée à Sciences Po

4 heures

Le problème se compose de 2 parties.
Les calculatrices sont autorisées.
Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur typographique, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Le problème suivant est constitué de deux parties indépendantes entre elles. Dans chaque partie, on étudie un exemple classique de loi de probabilité continue à densité.

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Première partie

Soit λ un nombre réel non nul.
On considère la fonction $f_\lambda : x \longmapsto e^{-\lambda x}$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est notée $\mathscr{C}_\lambda$.

A

1. Étudier les variations de la fonction f_λ selon le signe de λ.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente $T_{\lambda,\ a}$ à la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ au point A d'abscisse a, avec a un nombre réel quelconque.
3. **a.** À l'aide de la calculatrice, conjecturer, selon le signe de λ ,la position de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ par rapport à la tangente $T_{\lambda,\ a}$ au point A.
   b. Donner l'allure de la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ selon le signe de λ.

B

1. Pour tout réel $\alpha > 0$, on note $\mathscr{A}_\lambda(\alpha)$ l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_\lambda$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$, exprimée en unités d'aire.
   a. Déterminer la valeur de $\mathscr{A}_\lambda(\alpha)$.
   b. Déterminer, si elle existe, la limite de $\mathscr{A}_\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
2. **a.** Justifier l'existence des écritures $I_\lambda(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha t f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t$ et $J_\lambda(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha t^2 f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t$.
   Calculer la valeur de chacune de ces deux intégrales.
   En déduire leurs limites respectives lorsque α tend vers $+\infty$, si elles existent.

C

On dit qu'une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ est une densité de probabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ si :

- pour tout réel x de $[0\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$;
- la fonction f est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- la limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est égale à 1.

On définit alors une loi de probabilité P sur $[0\ ;\ +\infty[$ de densité f : pour tout intervalle $[a\ ;\ b]$ inclus dans $[0\ ;\ +\infty[$, la probabilité de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est $P([a\ ;\ b]) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $[0\ ;\ +\infty[$ suit la loi de probabilité P si, pour tout intervalle $[a\ ;\ b]$ inclus dans $[0\ ;\ +\infty[$, $P(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Dans la suite de cette partie C., λ est un réel strictement positif et on considère la fonction φ_λ : $x \longmapsto e^{-\lambda x}$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. **a.** Déduire de ce qui précède que φ_λ est une densité de probabilité sur $[0 ; +\infty[$.

   b. Soit X_λ une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité φ_λ.
   Reconnaître la loi suivie par X_λ.

2. **a.** On appelle espérance de X_λ le réel noté $\text{E}(X_\lambda)$ défini par
   $\text{E}(X_\lambda) = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x t\varphi_\lambda\lambda(t)\,\text{d}t$.
   Justifier l'existence de la limite précédente et donner une expression simple de $\text{E}(X_\lambda)$ en fonction de λ.

   b. Le temps d'attente en minutes à un standard téléphonique est une variable aléatoire Y_λ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. L'espérance $\text{E}(Y_\lambda)$ représente alors le temps moyen d'attente à ce standard.
   Sachant que ce temps moyen est de 5 minutes, déterminer la probabilité d'attendre encore 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 2 minutes.

3. On appelle variance de X_λ le réel noté $V(X_\lambda)$ défini par :

$$V(X_\lambda) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x t^2\varphi_\lambda\lambda(t)\,\text{d}t - [\text{E}(X\lambda)]^2.$$

   Justifier l'existence de la limite précédente et déterminer une expression simple de $V(X_\lambda)$ en fonction de λ.

Deuxième partie

Soit λ un réel non nul, arbitrairement fixé.

On considère la fonction $g_\lambda : x \longmapsto \text{e}^{-\lambda x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est notée Γ_λ.

A

Dans cette partie A, plusieurs cas pourront être envisagés selon les valeurs du réel λ.

1. Faire une étude de la fonction g_λ : parité, limites, variations.

2. **a.** Déterminer la dérivée seconde de la fonction g_λ.
   On admet que la courbe représentative d'une fonction f deux fois dérivable traverse sa tangente en un point A d'abscisse a si et seulement si la dérivée seconde de la fonction f s'annule en a en changeant de signe.

   b. La courbe Γ_λ présente-t-elle des points où elle traverse sa tangente ?

   c. Donner l'allure de la courbe Γ_λ.

B

On considère les fonctions $F_\lambda : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \text{e}^{\lambda t^2}\,\text{d}t$ et $F_1 : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \text{e}^{-t}\,\text{d}t$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Rappeler l'argument permettant de justifier la dérivabilité de la fonction F_λ puis donner l'expression de $F'_\lambda(x)$, pour tout réel x.

   b. En déduire que, pour tout réel x, on a l'égalité : $F_\lambda(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(x\sqrt{\lambda}\right)$.

2. Justifier que la fonction F_λ est impaire.

3. Étudier les variations de la fonction F_λ.

   Dans la suite de la deuxième partie, on se place dans le cas où λ est strictement positif.

4. **a.** Montrer que, pour tout réel t supérieur ou égal $\dfrac{1}{\lambda}$, $g_\lambda(t) \leqslant \text{e}^{-t}$.

b. Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\lambda}$,

$F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \leqslant \displaystyle\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

En déduire que, pour tout réel x supérieur ou égal à $\dfrac{1}{\lambda}$,

$F_\lambda(x) \leqslant F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) + \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}}.$

Pour tout entier naturel strictement positif, on note $u_n = F_\lambda(n)$.

c. Prouver que la suite $(u_n)_{n>0}$ a une limite finie en $+\infty$, que l'on note L_λ.

On admet que la fonction F_λ admet également pour limite L_λ lorsque x tend vers $+\infty$.

De même, on peut prouver que F_1 admet une limite finie en $+\infty$ notée L_1.

d. Quelle relation existe-t-il entre L_λ et L_1 ?

e. Montrer que : $0 \leqslant L_\lambda - F_\lambda\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{\lambda}}$.

f. On suppose dans cette question que $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Donner une valeur approchée de $L_{\frac{1}{2}}$ à e^{-2} près.

On admet dans la suite du problème que $L_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

g. Déterminer la valeur exacte de L_λ.

C

On dit qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si :

- pour tout réel x, $f(x) \geqslant 0$;
- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$;
- les limites $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existent et sont finies, leur somme étant égale à 1.

On définit alors une loi de probabilité P sur $\mathbb{R}$ de densité f : pour tout réel a, la probabilité de l'intervalle $]-\infty\,;\,a]$ est $P(]-\infty\,;\,a]) = \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Une variable aléatoire X_λ à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit la loi de probabilité P si, pour tout réel a, $P(X \leqslant a) = \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit la fonction $\Psi : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. **a.** Préciser la parité de la fonction Ψ.

b. Déduire de la partie B. que la fonction Ψ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité Ψ.

(La loi suivie par X est appelée loi normale centrée réduite qui est très utilisée en statistique et probabilités.)

2. On appelle espérance de X le réel noté $\mathrm{E}(X)$ défini par :

$$\mathrm{E}(X) = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t\Psi(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to-\infty}\int_0^x t\Psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Justifier l'existence des limites précédentes et calculer $\mathrm{E}(X)$.

3. **a.** En s'aidant de la partie B. précédente, justifier que pour tout réel a supérieur à 2, la probabilité $P(2 \leqslant X \leqslant a)$ est majorée par $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-2}$.

b. En déduire que $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{e}^{-2} \leqslant P(0 \leqslant X \leqslant 2) \leqslant \dfrac{1}{2}$ puis déterminer un encadrement de la probabilité $P(X < 2)$.

D

Lors de l'étude de la loi normale centrée réduite, il est utile de s'intéresser aux limites de la forme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^n \Psi(t)\,\text{d}t$ où n est un entier naturel.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $_n\ :\ x \longmapsto x^n\text{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout réel x positif, on pose alors $b_n(x) = \displaystyle\int_0^x \ _n(t)\,\text{d}t$.

1. Calculer $b_1(x)$.
2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 et pour tout réel x positif,

$$b_n(x) = -x^{n-1}\text{e}^{-\frac{x^2}{2}} + (n-1)b_{n-2}(x).$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $b_n(x)$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, notée B_n.
   Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B_n = (n-1)B_{n-2}$.
   Donner les valeurs de B_1, B_2, B_3 et B_4.
3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k, on a $B_{2k+1} = 2^k k!$ et $B_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{k+1}k!}\sqrt{2\pi}$.

   b. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^n \Psi(t)\,\text{d}t$ en fonction de n.

Sciences Po 2011, corrigé de Crouzet

Épreuve de Mathématiques 2011

Correction

Première partie

A.1. Pour tout réel $\lambda \neq 0$, f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_\lambda'(x) = -\lambda\, e^{-\lambda x}$.

Comme $e^a > 0$ pour tout réel a, alors $f_\lambda'(x)$ est du signe de $-\lambda$.

On en déduit que f_λ est strictement croissante si $\lambda < 0$ et strictement décroissante si $\lambda > 0$.

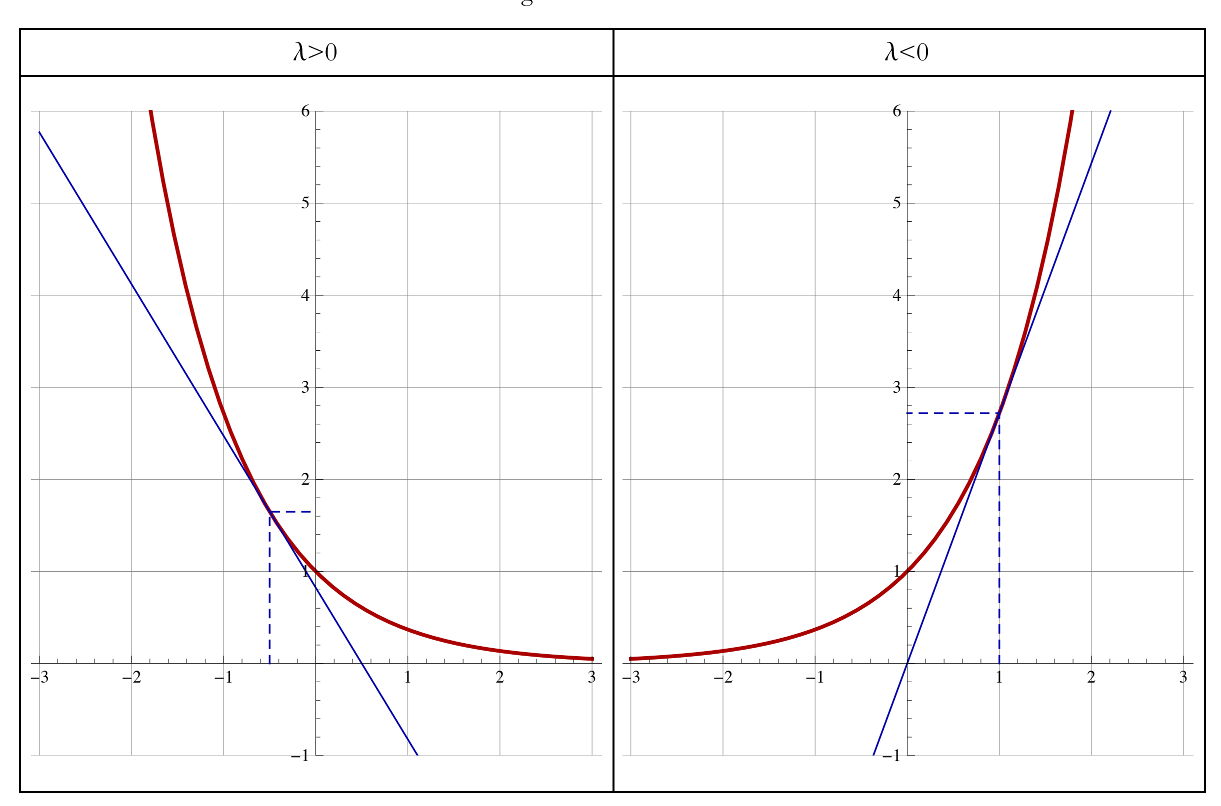
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$.

L'équation de la tangente $T_{\lambda,a}$ à $\mathscr{C}_\lambda$ au point A d'abscisse a est donnée par $y = f_\lambda'(a)\,(x-a) + f_\lambda(a)$.

On obtient donc $y = -\lambda\, e^{-\lambda a}(x-a) + e^{-\lambda a}$ d'où $y = -\lambda\, e^{-\lambda a}\, x + e^{-\lambda a}(1 + a\,\lambda)$.

3.a. La courbe $\mathscr{C}_\lambda$ est au-dessus de sa tangente $T_{\lambda,a}$ au point A, quel que soit le signe de λ.

b. On obtient deux allures de courbes suivant le signe de λ :



B.1.a. Soit un réel $\alpha > 0$.

On a $\mathrm{A}_\lambda(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f_\lambda(t)\, dt$ puisque $f_\lambda(x) \geq 0$ pour tout réel $x \in [0;\alpha]$ et f_λ est continue sur $[0;\alpha]$.

Remarquons alors qu'une primitive de f_λ sur $[0;\alpha]$ est donnée par $x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda x}$.

On obtient donc $\mathrm{A}_\lambda(\alpha) = \left[-\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda t}\right]_0^\alpha = -\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\alpha} - \left(-\dfrac{1}{\lambda}\, e^{-\lambda\times 0}\right) = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right)$ u.a.

b. Soit $\lambda > 0$, alors $-\lambda < 0$ et par suite $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} -\lambda\,\alpha = -\infty$.

Donc comme $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$, par composition, on obtient $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} e^{-\lambda\alpha} = 0$.

On en déduit $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) = \frac{1}{\lambda}$.

Soit $\lambda < 0$, alors $-\lambda > 0$.

Ainsi $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} -\lambda\alpha = +\infty$ et comme $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$, par composition de limites, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} e^{-\lambda\alpha} = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (1 - e^{-\lambda\alpha}) = -\infty$ et comme $\frac{1}{\lambda} < 0$ alors $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) = +\infty$.

Finalement $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A_{\lambda}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \text{ si } \lambda > 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$.

2.a. Les fonctions $t \mapsto t\, f_{\lambda}(t)$ et $t \mapsto t^2\, f_{\lambda}(t)$ sont continues sur $[0; \alpha]$ pour tout réel $\alpha > 0$ comme produit de fonctions continues sur $[0; \alpha]$ donc $I_{\lambda}(\alpha) = \int_0^{\alpha} t\, f_{\lambda}(t)\, dt$ et $J_{\lambda}(\alpha) = \int_0^{\alpha} t^2\, f_{\lambda}(t)\, dt$ existent.

b. Pour $I_{\lambda}(\alpha)$:

La formule d'intégration par parties donne:

$I_{\lambda}(\alpha) = \left[t \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} 1 \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right) dt$ d'où $I_{\lambda}(\alpha) = \left(-\frac{\alpha}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} - \left(-\frac{0}{\lambda} e^{-\lambda \times 0}\right)\right) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\alpha} f_{\lambda}(t)\, dt$ et finalement $I_{\lambda}(\alpha) = -\frac{\alpha}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right)\right)$ d'où $I_{\lambda}(\alpha) = \frac{1 - e^{-\lambda\alpha}(1 + \alpha\lambda)}{\lambda^2}$.

Calculons $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_{\lambda}(\alpha)$.

◊ Soit $\lambda > 0$.

On a pour tout réel $\alpha > 0$, $I_{\lambda}(\alpha) = \frac{1 - e^{-\lambda\alpha} + (-\lambda\alpha)\, e^{-\lambda\alpha}}{\lambda^2}$.

Or comme $-\lambda < 0$, $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} -\lambda\alpha = -\infty$ et on sait que $\lim\limits_{X \to -\infty} X\, e^{X} = 0$ donc par composition $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (-\lambda\alpha)\, e^{-\lambda\alpha} = 0$.

On a montré que $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (1 - e^{-\lambda\alpha}) = 1$.

Par conséquent, on obtient $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{1 - e^{-\lambda\alpha}}{\lambda^2} + \frac{(-\lambda\alpha)\, e^{-\lambda\alpha}}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$ d'où $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_{\lambda}(\alpha) = \frac{1}{\lambda^2}$.

◊ Soit $\lambda < 0$.

On a montré que $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} e^{-\lambda\alpha} = +\infty$.

De plus $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} (1 + \lambda\alpha) = -\infty$ d'où $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} 1 - e^{-\lambda\alpha}(1 + \lambda\alpha) = +\infty$.

Finalement $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{1 - e^{-\lambda\alpha}(1 + \alpha\lambda)}{\lambda^2} = +\infty$ puisque $\frac{1}{\lambda^2} > 0$. On a donc dans ce cas $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_{\lambda}(\alpha) = +\infty$.

Pour $J_{\lambda}(\alpha)$:

La formule d'intégration par parties donne:

$J_{\lambda}(\alpha) = \left[t^2 \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} 2\, t \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right) dt = \left[t^2 \times \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right)\right]_0^{\alpha} + \frac{2}{\lambda} I_{\lambda}(\alpha)$.

On en déduit donc $J_{\lambda}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} + \frac{2}{\lambda} \times \frac{1 - e^{-\lambda\alpha}(1 + \alpha\lambda)}{\lambda^2} = \frac{2 - e^{-\lambda\alpha}(2 + 2\alpha\lambda + \alpha^2\lambda^2)}{\lambda^3}$.

Calculons $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} J_{\lambda}(\alpha)$.

◊ Soit $\lambda > 0$.

Comme $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_{\lambda}(\alpha) = \frac{1}{\lambda^2}$ alors $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \frac{2}{\lambda} I_{\lambda}(\alpha) = \frac{2}{\lambda^3}$.

On a d'autre part $\frac{\alpha^2}{\lambda}\, e^{-\lambda\alpha} = \frac{(-\lambda\alpha)^2\, e^{-\lambda\alpha}}{\lambda^3}$ pour tout réel α.

Comme $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} -\lambda\alpha = -\infty$ et comme $\lim\limits_{X\to-\infty} X^2 e^X = 0$, alors on obtient $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} (-\lambda\alpha)^2 e^{-\lambda\alpha} = 0$.

Par conséquent, on en déduit $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} -\frac{\alpha^2}{\lambda} e^{-\lambda\alpha} + \frac{2}{\lambda} I_\lambda(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{2}{\lambda} I_\lambda(\alpha) = \frac{2}{\lambda^3}$. Finalement $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} J_\lambda(\alpha) = \frac{2}{\lambda^3}$.

◊ Soit $\lambda < 0$.

On sait que $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} e^{-\lambda\alpha} = +\infty$.

comme $\lambda^2 > 0$, on a $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} (2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2\alpha^2) = +\infty$ (comme polynôme du second degré en α).

Par produit, on obtient alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} 1 - e^{-\lambda\alpha}(2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2\alpha^2) = -\infty$.

Enfin comme $\lambda^3 < 0$, alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \frac{1 - e^{-\lambda\alpha}(2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2\alpha^2)}{\lambda^3} = +\infty$.

Finalement $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} J_\lambda(\alpha) = +\infty$.

C. Soit λ est un réel strictement positif.

1.a. Comme $e^a > 0$ pour tout réel a, alors $e^{-\lambda x} > 0$ pour tout réel $x \geq 0$ et comme $\lambda > 0$ alors $\varphi_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \geq 0$ pour tout réel $x \geq 0$.

La fonction φ_λ est clairement continue sur $[0; +\infty[$ puisque composée des fonctions $x \mapsto -\lambda x$ et $x \mapsto e^x$ continues sur $\mathbb{R}$.

Enfin, on remarque $\varphi_\lambda = \lambda f_\lambda$ donc pour tout réel $x > 0$, $\int_0^x \varphi_\lambda(t)\, dt = \lambda \int_0^x f_\lambda(t)\, dt$.

Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \varphi_\lambda(t)\, dt = \lambda \times \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f_\lambda(t)\, dt = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$ d'après la question **B.1.b.**

La fonction φ_λ vérifie les 3 conditions données: φ_λ est une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$.

b. Soit X_λ une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité φ_λ.

La variable aléatoire X_λ suit la loi exponentielle de paramètre λ encore appellée loi de durée de vie sans viellissement.

2.a. On a $\lambda > 0$. On sait donc que $\lim\limits_{x\to+\infty} I_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^2} \in \mathbb{R}$.

On remarque alors que $E(X_\lambda) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\varphi_\lambda(t)\, dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \lambda \int_0^x t\, f_\lambda(t)\, dt = \lambda \lim\limits_{x\to+\infty} I_\lambda(\alpha)$.

Donc $E(X_\lambda) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\varphi_\lambda(t)\, dt$ existe puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} I_\lambda(x)$ existe et on a $E(X_\lambda) = \lambda \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$.

b. Le temps d'attente en minutes à un standard téléphonique est une variable aléatoire Y_λ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

L'espérance $E(Y_\lambda)$ représente alors le temps moyen d'attente à ce standard.

Sachant que ce temps moyen est de 5 minutesm déterminer la probabilité d'attendre encore 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 2 minutes.

Y_λ suit une loi exponentielle de paramètre λ donc pour tout intervalle $[a; b]$ inclus dans $[0; +\infty[$, $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi_\lambda(t)\, dt$.

Déterminons λ.

On a montré précédemment que $E(Y_\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ et on nous dit que ce temps d'attente moyen est de 5 minutes.

On en déduit $\frac{1}{\lambda} = 5$ d'où $\lambda = \frac{1}{5}$.

Enfin la probabilité d'attendre encore 5 minutes, sachant qu'on a déjà attendu 2 minutes est donc la probabilité conditionnelle $P_{(X\geq 2)}(2 \leq X \leq 5) = \dfrac{P(2 \leq X \leq 5)}{P(X \geq 2)}$ puisque $(2 \leq X \leq 5) \bigcap (X \geq 2) = (2 \leq X \leq 5)$.

Or on a:

- $P(2 \leq X \leq 7) = \displaystyle\int_2^7 \varphi_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{5} \times \left[-5\,e^{-\frac{1}{5}t}\right]_2^7 = e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{7}{5}} = e^{-\frac{2}{5}}(1 - e^{-1})$
- $P(X \geq 2) = P(\overline{X \leq 2}) = 1 - P(0 \leq X \leq 2) = 1 - \displaystyle\int_0^2 \varphi_\lambda(t)\,dt = \frac{1}{5} \times \left[-5\,e^{-\frac{1}{5}t}\right]_0^2 = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{5}}\right) = e^{-\frac{2}{5}}$.

La probabilité cherchée est donc $p = \dfrac{e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{7}{5}}}{e^{-\frac{2}{5}}} = 1 - e^{-1}$.

Remarque:
Sachant que l'on est en présence de la loi de durée de vie sans viellissement, la probabilité d'attendre encore 5 minutes ne dépend pas de combien de minutes, on a déjà attendu.
Donc la probabilité cherchée est $P(0 \leq X \leq 5) = 1 - e^{-1}$.

3. On a pour tout réel $x > 0$, $\displaystyle\int_0^x t^2\,\varphi_\lambda(t)\,dt = \lambda \int_0^x t^2\,f_\lambda(t)\,dt = \lambda\,J_\lambda(x)$.

Alors comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} J_\lambda(x) = \frac{2}{\lambda^3} \in \mathbb{R}$, on en déduit que $V(X_\lambda)$ existe et de plus $V(X_\lambda) = \lambda \times \dfrac{2}{\lambda^3} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Deuxième partie

A.1. Parité:
Pour tout réel $\lambda \neq 0$, al fonction g_λ est paire.

En effet pour tout réel x, $-x$ est réel et de plus $g_\lambda(-x) = e^{-\lambda(-x)^2} = e^{-\lambda x^2} = g_\lambda(x)$.

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Limites: On différentie les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

◊ Pour $\lambda > 0$: $-\lambda < 0$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-\lambda x^2) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (-\lambda x^2) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-\lambda x^2} = 0$.

Finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_\lambda(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g_\lambda(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à Γ_λ en $+\infty$ et en $-\infty$.

◊ Pour $\lambda < 0$: $-\lambda > 0$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (-\lambda x^2) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x^2} = +\infty$.

On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (-\lambda x^2) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{-\lambda x^2} = +\infty$.

Finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_\lambda(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g_\lambda(x) = +\infty$.

Variations:
Pour tout réel $\lambda \neq 0$, la fonction g_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée des fonctions $x \mapsto -\lambda x^2$ et $x \mapsto e^x$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g_\lambda'(x) = -2\lambda x\,e^{-\lambda x^2}$.

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on sait donc que $g_\lambda'(x)$ est du signe de $-2\lambda x$ sur $\mathbb{R}$.

On différentie alors les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

◊ Pour $\lambda > 0$: $-\lambda < 0$ donc $-2\lambda x$ est du signe opposé à celui de x .
On en déduit $g_\lambda'(x) < 0$ pour $x > 0$ et $g_\lambda'(x) > 0$ pour $x < 0$.

La fonction g_λ est donc strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

◊ Pour $\lambda < 0$: $-\lambda > 0$ donc $-2\lambda x$ est du signe de x .
On en déduit $g_\lambda'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $g_\lambda'(x) > 0$ pour $x > 0$.

La fonction g_λ est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2.a. On a vu que $g_\lambda'(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$ pour tout réel x. g_λ' est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $g_\lambda''(x) = -2\lambda e^{-\lambda x^2} - 2\lambda x \times (-2\lambda x e^{-\lambda x^2}) = 2\lambda e^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1)$.

b. On résout l'équation $g_\lambda''(x) = 0$ c'est à dire $2\lambda e^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1) = 0$.
Or comme $\lambda \neq 0$ et comme $e^{-\lambda x^2} > 0$ pour tout réel x, cela revient donc à résoudre l'équation $2\lambda x^2 - 1 = 0$.
On distingue les cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$.

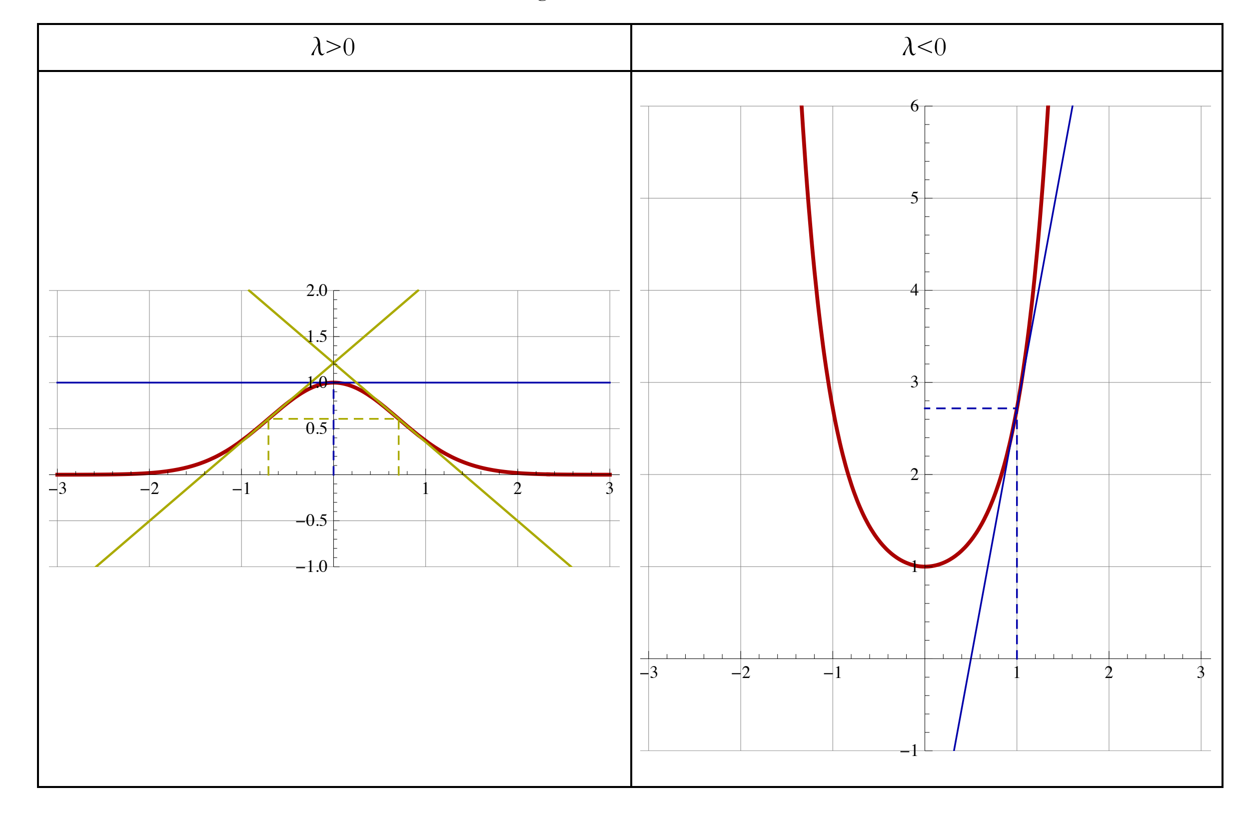
◊ Pour $\lambda < 0$.
Alors $2\lambda x^2 \leq 0$ pour tout réel x d'où $(2\lambda x^2 - 1) \leq -1 < 0$.
L'équation $2\lambda x^2 - 1 = 0$ n'a donc pas de solution réelle.
L'équation $g_\lambda''(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.
La courbe Γ_λ ne présente aucun point où elle traverse sa tangente.
On peut vérifier que la courbe Γ_λ est toujours au-dessus de ses tangentes.

◊ Pour $\lambda > 0$.
Comme $\lambda > 0$, alors $2\lambda x^2 - 1 = \left(\sqrt{2\lambda}\, x\right)^2 - 1^2 = \left(\sqrt{2\lambda}\, x - 1\right)\left(\sqrt{2\lambda}\, x + 1\right)$.
L'équation $g_\lambda''(x) = 0$ revient donc à $\left(\sqrt{2\lambda}\, x - 1\right)\left(\sqrt{2\lambda}\, x + 1\right) = 0$.
Il y a donc 2 solutions à l'équation: $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ et $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

La courbe Γ_λ présente donc 2 points où elle traverse ses tangentes: les points d'abscisses $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ et $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

c. On obtient deux allures de courbes suivant le signe de λ :

$\lambda>0$	$\lambda<0$



B.1.a. La fonction $x \mapsto e^{-\lambda x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on sait que F_λ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F_\lambda'(x) = e^{-\lambda x^2} = g_\lambda(x)$ pour tout réel x.

b. La fonction F_1 est dérivable et pour tout réel x, $F_1'(x) = e^{-x^2} = g_1(x)$.

Alors la fonction $G : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $G'(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \times \sqrt{\lambda}\, e^{-\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)^2} = e^{-\lambda x^2} = F_\lambda'(x)$.

Donc F_λ et G sont deux primitives de la même fonction g_λ.
Elles diffèrent donc d'une constante K : on a $G(x) = F_\lambda(x) + K$ pour tout réel x.
Rappelons alors que F_λ est l'unique primitive de g_λ qui s'annule en 0: on a $F_\lambda(0) = 0$.

On en déduit $G(0) = K$, or $G(0) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda} \times 0\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1(0) = 0$.

Par suite $K = 0$ et $G(x) = F_\lambda(x)$ pour tout réel x.

Pour tout réel x, on a l'égalité: $F_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$.

2. Pour tout réel x, $-x$ est réel.
La fonction $G : x \mapsto -F_\lambda(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $G'(x) = -(-F_\lambda'(-x)) = e^{-\lambda(-x)^2} = e^{\lambda x^2} = g_\lambda(x)$.
La fonction G est donc une primitive de g_λ.
Remarquons alors que $G(0) = -F_\lambda(0) = 0$.
G est donc la primitive de g_λ qui s'annule en 0: c'est F_λ.
Pour tout réel x, on a donc $-F_\lambda(-x) = F_\lambda(x)$, ou encore $F_\lambda(-x) = -F_\lambda(x)$: la fonction F_λ est donc impaire.

Remarque 1:
On peut raisonner sur les aires.
Comme $g_\lambda(x) > 0$ pour tout réel x, alors pour $a > 0$, $F_\lambda(a) = \int_0^a g_\lambda(t)\, dt$ est l'aire du domaine du plan compris entre la courbe Γ_λ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

Pour tout réel $a > 0$, $-a < 0$, de même $\int_{-a}^0 g_\lambda(t)\, dt$ est l'aire du domaine du plan compris entre la courbe Γ_λ, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -a$ et $x = 0$.
Comme la fonction f_λ est paire, alors sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc les domaines précités sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées: ils sont superposables et ont la même aire.

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $\int_0^x g_\lambda(t)\, dt = \int_{-x}^0 g_\lambda(t)\, dt$.

Remarquons finalement $F_\lambda(-x) = \int_0^{-x} g_\lambda(t)\, dt = -\int_{-x}^0 g_\lambda(t)\, dt$ d'où $F_\lambda(-x) = -F_\lambda(x)$.

En raisonnant de même pour $x < 0$, on obtient que F_λ est impaire.

Remarque 2:
Ce résultat est général (à condition de choisir la primitive qui s'annule en 0).
Soit f une fonction qui s'annule en 0.
La fonction est paire (resp impaire) si et sa seulement si sa dérivée est impaire (resp paire).

Remarque 3:
On peut aussi faire un changement de variable dans l'intégrale (hors-programme de terminale).
On a $\int_0^{-x} g_\lambda(t)\, dt = \int_{u(0)}^{u(-x)} g_\lambda(u(t))\, du(t)$ avec $u(x) = -x$ donc $\int_0^{-x} g_\lambda(t)\, dt = \int_0^{x} g_\lambda(-t)\,(-dt) = -\int_0^{x} g_\lambda(t)\, dt$ car g_λ est paire.

3. Pour tout réel x, $F_\lambda'(x) = e^{-\lambda x^2}$ et comme $e^a > 0$ pour tout réel a, alors $F_\lambda'(x) > 0$ pour tout réel x.
La fonction F_λ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de la deuxième partie, on se place dans le cas où λ est strictement positif.

4.a. Montrer que, pour tout réel t supérieur ou égal à $\frac{1}{\lambda}$, $g_\lambda(t) \leq e^{-t}$.

Soit $t \geq \frac{1}{\lambda} > 0$.

Alors $-\lambda t \leq -1 < 0$ et donc comme $t > 0$, $-\lambda t^2 \leq -t$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{-\lambda t^2} \leq e^{-t}$ d'où $g_\lambda(t) \leq e^{-t}$.

Remarque:

On peut aussi étudier le signe de la différence $e^{-t} - e^{-\lambda t^2} = e^{-\lambda t^2}(e^{t(\lambda t-1)} - 1)$.

Comme $t \geq \frac{1}{\lambda} > 0$, alors $\lambda t - 1 \geq 0$ d'où $t(\lambda t - 1) \geq 0$ et ainsi $e^{t(\lambda t-1)} \geq 1$.

Comme $e^{-\lambda t^2} > 0$, alors $e^{-t} - e^{-\lambda t^2} \geq 0$ pour tout réel $t \geq \frac{1}{\lambda}$.

b. En intégrant l'inégalité précédente sur $\left[\frac{1}{\lambda}; x\right]$, $\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} g_\lambda(t)\, dt \leq \int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} e^{-t}\, dt$.

Remarquons alors que $\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} g_\lambda(t)\, dt = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{0} g_\lambda(t)\, dt + \int_{0}^{x} g_\lambda(t)\, dt = \int_{0}^{x} g_\lambda(t)\, dt - \int_{0}^{\frac{1}{\lambda}} g_\lambda(t)\, dt = F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Finalement, on obtient que pour tout réel x supérieur ou égal à $\frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} e^{-t}\, dt$.

On a $\int_{\frac{1}{\lambda}}^{x} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_{\frac{1}{\lambda}}^{x} = -e^{-x} - \left(-e^{-\frac{1}{\lambda}}\right) = e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-x} \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$ puisque $e^{x} > 0$ pour tout réel x.

Pour tout réel x supérieur ou égal à $\frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$ d'où $F_\lambda(x) \leq F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

Pour tout entier naturel strictement positif, on pose $u_n = F_\lambda(n)$.

c. La suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante.

En effet $\int_{0}^{n+1} g_\lambda(t)\, dt = \int_{0}^{n} g_\lambda(t)\, dt + \int_{n}^{n+1} g_\lambda(t)\, dt$ d'où $u_{n+1} = u_n + \int_{n}^{n+1} g_\lambda(t)\, dt$.

Alors comme pour tout réel t, $g_\lambda(t) > 0$, en particulier pour tout réel $t \in [n; n+1]$ et donc $\int_{n}^{n+1} g_\lambda(t)\, dt \geq 0$.

Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier naturel $n > 0$.

La suite $(u_n)_{n>0}$ est majorée à partir du rang $N \geq E\left(\frac{1}{\lambda}\right) + 1$.

Pour tout entier $n \geq N$, $n \geq E\left(\frac{1}{\lambda}\right) + 1 > \frac{1}{\lambda}$ et comme pour tout réel $x \geq \frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) \leq F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$, alors on en déduit que pour tout entier $n \geq N$, $F_\lambda(n) \leq F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$ d'où $u_n \leq F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) + e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

La suite $(u_n)_{n>0}$ est croissante et majorée à partir d'un certain rang donc on sait qu'elle est convergente.

La suite $(u_n)_{n>0}$ a une limite finie en $+\infty$, que l'on note L_λ .

d. On a montré que pour tout réel x , $F_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\lambda(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\, x\right)$.

Alors comme $\sqrt{\lambda} > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\lambda}\, x = +\infty$ et donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} F_1(X) = L_1$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} F_1\left(\sqrt{\lambda}\, x\right) = \frac{L_1}{\sqrt{\lambda}}$ et donc $L_\lambda = \frac{L_1}{\sqrt{\lambda}}$.

e. On a montré que pour tout réel x supérieur ou égal à $\frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

Comme de plus F_λ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors pour $x \geq \frac{1}{\lambda}$, $F_\lambda(x) \geq F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ d'où $0 \leq F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

En passant à la limite dans l'inégalité, on obtient $0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty}\left(F_\lambda(x) - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{\lambda}}$ d'où comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\lambda(x) = L_\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq L_\lambda - F_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq e^{-\frac{1}{\lambda}}$.

f. On suppose dans cette question $\lambda = \frac{1}{2}$.

D'après la question précédente, $0 \leq L_{\frac{1}{2}} - F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \leq e^{-\frac{1}{\frac{1}{2}}}$ d'où $0 \leq L_{\frac{1}{2}} - F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \leq e^{-2}$.

Donc une valeur approchée à e^{-2} près de $L_{\frac{1}{2}}$ est $F_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Remarque:
On s'arrête là.
On ne connaît pas de primitive de $g_{\frac{1}{2}}$ pas plus que de g_λ.
En fait les fonctions F_λ, en particulier F_1 sont des "nouvelles" fonctions qui ne s'expriment pas à l'aide des fonctions de références connues.
Leurs expressions sont justement données à l'aide d'intégrales.

On admet dans la suite du problème que $L_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

g. On a montré que $L_\lambda = \frac{L_1}{\sqrt{\lambda}}$ donc $L_{\frac{1}{2}} = \frac{L_1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ d'où $L_1 = \frac{L_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On en déduit donc $L_\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$ pour tout réel $\lambda > 0$.

C. Soit la fonction $\psi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, définie sur $\mathbb{R}$.

1.a. On a $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{\frac{1}{2}}(x)$ et comme $g_{\frac{1}{2}}$ est paire alors ψ est paire.

b. Comme une exponentielle est toujours positive, et comme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} > 0$ alors $\psi(x) \geq 0$ pour tout réel x.

La fonction $g_{\frac{1}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (cf **B.1.a.**) donc la fonction $\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_{\frac{1}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout réel x, $\int_0^x \psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \psi(t)\,dt$ existe et est finie égale à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} L_1 = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2}$.
On a montré à la question **B.2.** que la fonction $F_{\frac{1}{2}}$ est impaire donc $F_{\frac{1}{2}}(x) = -F_{\frac{1}{2}}(-x)$ pour tout réel x donc $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -F_{\frac{1}{2}}(-x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\frac{1}{2}}(-x)$.

Alors comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\frac{1}{2}}(x) = L_1$, par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\frac{1}{2}}(-x) = L_1$.

On en déduit $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\frac{1}{2}}(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = -L_1$ et comme $\int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = -\int_x^0 g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt = L_1$.

Finalement, $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$ existe finie et est égale à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} L_1 = \frac{1}{2}$.

Les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \psi(t)\,dt$ existent et sont finies, leur somme étant égale à $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

La fonction ψ vérifient les 3 conditions données, la fonction ψ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Remarque:
On peut aussi raisonner avec la parité de ψ et sur les aires pour démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \psi(t)\,dt = \frac{1}{2}$.

2. Pour tous réels a et b,

$$\int_a^b t\,\psi(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (-t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b u'(t)\, e^{u(t)}\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{u(t)}]_a^b = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}\right).$$

Alors pour tout réel x, $\int_0^x t\,\psi(t)\,dt = \frac{1 - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt$ existe finie et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt$ existe finie et $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 t\,\psi(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ puisque $\int_x^0 t\,\psi(t)\,dt = -\int_0^x t\,\psi(t)\,dt$ pour tout réel x.

Finalement $E(X) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 t\,\psi(t)\,dt + \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,\psi(t)\,dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$.

Remarque:
On dit que la variable aléatoire est centré puisque justement son espérance est nulle.

3.a. Soit un réel a supérieur ou égal à 2.

Remarque:
L'énoncé donne par définition $P(X \le a) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt$ mais ne dit rien sur $P(a \le X \le b)$ ni sur $P(X = a)$.

On sait donc que $P(X \le a) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a \psi(t)\,dt$.

Or pour tout réel $a \ge 0$, on a $(X \le a) = (X \le 0) \bigcup (0 < X \le a)$ donc $P(X \le a) = P(X \le 0) + P(0 < X \le a)$ puisque $(X \le 0) \bigcap (0 < X \le 2) = \emptyset$.

On a donc l'égalité $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a \psi(t)\,dt = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt + P(0 < X \le a)$ d'où

$P(0 < X \le a) = \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^a \psi(t)\,dt - \lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 \psi(t)\,dt$.

Or comme $\int_x^a \psi(t)\,dt - \int_x^0 \psi(t)\,dt = \int_0^a \psi(t)\,dt \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_x^a \psi(t)\,dt - \int_x^0 \psi(t)\,dt\right) \in \mathbb{R}$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_x^a \psi(t)\,dt - \int_x^0 \psi(t)\,dt\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^a \psi(t)\,dt - \lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^0 \psi(t)\,dt$ et finalement $P(0 < X \le a) = \int_0^a \psi(t)\,dt$.

On a aussi pour tous réels $a < b$, $(0 < X \le b) = (0 < X \le a) \bigcup (a < X \le b)$, réunion disjointe, donc $P(a < X \le b) = P(0 < X \le b) - P(0 < X \le a) = \int_0^b \psi(t)\,dt - \int_0^a \psi(t)\,dt = \int_a^b \psi(t)\,dt.$

Remarquons enfin que la variable aléatoire X ne charge pas les points, c'est à dire que pour tout réel a, $P(X = a) = 0$.

Pour tout réel $\epsilon > 0$, $P(a - \epsilon < X \le a) = \int_{a-\epsilon}^a \psi(t)\,dt.$

On a $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int_{a-\epsilon}^a \psi(t)\,dt = \int_a^a \psi(t)\,dt = 0$ par continuité de la fonction ψ.

D'autre part comme $a \in]a-\epsilon; a]$ pour tout réel $\epsilon > 0$, alors $\lim\limits_{\epsilon->0}(a - \epsilon < X \le a) = (X = a)$. Par suite $\lim\limits_{\epsilon\to 0} P(a - \epsilon < X \le a) = P(X = a)$.

On obtient donc $P(X = a) = 0$.

On en déduit donc que $P(0 \le X \le a) = P(0 < X \le a)$ et $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b)$ puisque $[0; a] = \{a\} \bigcup]0; a]$ et $[a; b] = \{a\} \bigcup]a; b]$ qui sont des réunions disjointes.

D'après la partie **B.**, on sait que pour tout réel $x \ge \frac{1}{2}$, $0 \le \int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt \le e^{-2}$ donc $0 \le \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et finalement $0 \le \int_0^x \psi(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$.

Comme $a \ge 2 \ge \frac{1}{2}$, on obtient $0 \le \int_0^a \psi(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et $0 \le \int_0^2 \psi(t)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$

puis $\int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \le \int_0^a \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} + \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt$ et $-\int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt \ge -\int_0^2 \psi(t)\,dt \ge -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} - \int_0^{\frac{1}{2}} \psi(t)\,dt$.

Alors $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le \int_0^a \psi(t)\,dt - \int_0^2 \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et finalement $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le \int_2^a \psi(t)\,dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$

c'est à dire $-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le P(2 \le X \le a) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$.

La probabilité $P(2 \le X \le a)$ est majorée par $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$.

b. Quel que soit le réel a positif et quel que soit $x \ge a$, $P(0 \le X \le a) = \int_0^a \psi(t)\,dt \le \int_0^x \psi(t)\,dt \le \lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \psi(t)\,dt$ donc $P(0 \le X \le a) \le \frac{1}{2}$.

En particulier, $P(0 \le X \le 2) \le \frac{1}{2}$.

De plus pour tout réel a, $P(0 \le X \le a) = P(0 \le X \le 2) + P(2 \le X \le a)$.

Alors comme pour tout réel $a \ge 2$, $P(2 \le X \le a) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et $P(0 \le X \le a) \le P(0 \le X \le 2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$.

D'où $\lim\limits_{a\to+\infty} P(0 \le X \le a) \le P(0 \le X \le 2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ c'est à dire $\frac{1}{2} \le P(0 \le X \le 2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2}$ et donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le P(0 \le X \le 2)$.

Finalement $\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-2} \le P(0 \le X \le 2) \le \frac{1}{2}$.

On a $P(X<2)=P(X\le 2)=P(X\le 0)+P(0\le X\le 2)$ donc de l'encadrement précédent, on déduit $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2}\le P(X<2)\le \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ d'où $1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-2}\le P(X<2)\le 1$.

En effet rappellons que $P(X\le 0)=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \psi(t)\,dt=\frac{1}{2}$.

D. Lors de l'étude la loi normale centrée réduite, il est utile de s'intéresser aux limites de la forme $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt$ où n est un entier naturel.

1. On a $b_1(x)=\int_0^x \chi_1(t)\,dt=\int_0^x t\times g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt=1-e^{-\frac{x^2}{2}}$ (Question **C.2.**).

2.a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit x un réel positif.

On a: $b_n(x)=\int_0^x \chi_n(t)\,dt=\int_0^x t^n\,e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\int_0^x t^{n-1}\times\left(t\,e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt$ et une primitive de $t\mapsto t\,e^{-\frac{t^2}{2}}$ est $t\mapsto -e^{-\frac{t^2}{2}}$.

La formule d'intégration par parties donne:

$b_n(x)=\left[t^{n-1}\times\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)\right]_0^x-\int_0^x (n-1)\,t^{n-2}\times\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt$

$b_n(x)=-x^{n-1}\,e^{-\frac{x^2}{2}}-\left(-0^{n-1}\times e^{-\frac{0^2}{2}}\right)+(n-1)\int_0^x \chi_{n-2}(t)\,dt$

$b_n(x)=-x^{n-1}\,e^{-\frac{x^2}{2}}+(n-1)\,b_{n-2}(x)$.

b. Soit un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Préliminaire 1: Soit k un entier naturel.

Pour tout réel $x>0$, $-x^k\,e^{-\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^k}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}\times\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}=-\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{x^k}\times\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}$.

Or on sait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$ et que $\lim_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^k}=+\infty$ pour tout entier naturel $k\ge 0$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}=+\infty$ et par inverse $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0$.

De plus $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k}=\begin{cases}1 \text{ si } k=0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$ donc par produit $\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{x^{n+1}}\times\frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0$.

Par suite $\lim_{x\to+\infty}-x^k\,e^{-\frac{x^2}{2}}=0$ pour tout entier naturel k.

Préliminaire 2:

On a montré que $b_1(x)=1-e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc $B_1=\lim_{x\to+\infty}b_1(x)=1\in\mathbb{R}$.

D'autre part remarquons que $b_0(x)=\int_0^x \chi_0(t)\,dt=\int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$ donc $B_0=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x g_{\frac{1}{2}}(t)\,dt=L_{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\in\mathbb{R}$ (question **B.**).

On raisonne par récurrence sur $n\ge 2$.

On définit pour n entier naturel ≥ 2, la propriété $\lim_{x\to+\infty}b_n(x)=B_n\in\mathbb{R}$.

La propriété est vraie au rang 2.

En effet, on a montré que $b_2(x)=-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}+(2-1)\,b_0(x)$ pour tout réel x positif.

Alors comme $\lim_{x\to+\infty}-x\,e^{-\frac{x^2}{2}}=0$ (préliminaire 1) et comme $\lim_{x\to+\infty}b_0(x)=B_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\in\mathbb{R}$ alors par somme de limites,

on a $\lim\limits_{x\to+\infty} b_2(x) = 0 + \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$.

Soit n un entier, $n \geq 2$.
On fait l'hypothèse de récurrence, la propriété est vraie jusqu'au rang n. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} b_k(x) \in \mathbb{R}$ pour $2 \leq k \leq n$.

On a montré que pour tout réel x positif, $b_{n+1}(x) = -x^n e^{-\frac{x^2}{2}} + n\, b_{n-1}(x)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^n e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ (préliminaire 1) et par hypothèse de récurrence, $\lim\limits_{x\to+\infty} b_{n-1}(x) \in \mathbb{R}$ car comme $n \geq 2$, alors $n - 1 \geq 1$.
Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n(x) = 0 + n \lim\limits_{x\to+\infty} b_{n-1}(x) \in \mathbb{R}$.

La propriété est vraie au rang $n + 1$. Elle est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.

c. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On sait que $b_n(x) = -x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n-1)\, b_{n-2}(x)$ donc $B_n = \lim\limits_{x\to+\infty} b_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n-1)\, b_{n-2}(x)\right)$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} b_{n-2}(x) = B_{n-2} \in \mathbb{R}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n-1)\, b_{n-2}(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (n-1)\, b_{n-2}(x) = (n-1) \lim\limits_{x\to+\infty} b_{n-2}(x) = (n-1)\, B_{n-2}$.

Par conséquent $B_n = (n-1)\, B_{n-2}$.

d. On a montré que $B_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \chi_1(t)\, dt = 1$ (question **C.2.**).

On en déduit $B_3 = (3-1)\, B_1 = 2$.

On a obtenu $B_2 = (2-1)\, B_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ d'où $B_4 = (4-1)\, B_2 = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

3.a. On raisonne par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.

Cas impair: Soit, pour k entier naturel, la propriété $I(k)$: $B_{2k+1} = 2^k\, k!$.

La propriété est vraie pour $k = 0$.
En effet $B_{2\times 0+1} = B_1 = 1$ et $2^0 \times 0! = 1 \times 1 = 1$ (par convention $0! = 1$).
donc on a $B_{2\times 0+1} = 2^0 \times 0!$.

Soit k un entier. On suppose la propriété $I(k)$ vraie. On a donc $B_{2k+1} = 2^k\, k!$
On a montré que pour tout entier n, $B_{n+2} = ((n+2)-1)\, B_{n+2-2} = (n+1)\, B_n$.
Alors comme $2(k+1)+1 = (2k+1)+2$, on en déduit $B_{2(k+1)+1} = (2(k+1)+1-1)\, B_{2k+1} = 2(k+1)\, B_{2k+1}$.
Comme par hypothèse de récurrence, $B_{2k+1} = 2^k\, k!$, on obtient $B_{2(k+1)+1} = 2(k+1) \times 2^k\, k! = (2\times 2^k)\times k! \times (k+1)$ d'où $B_{2(k+1)+1} = 2^{k+1}\,(k+1)!$.
La propriété $I(k+1)$ est vraie. La propriété $I(k)$ est donc héréditaire.
D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier k. On a donc $B_{2k+1} = 2^k\, k!$ pour tout entier naturel k.

Cas pair: Soit, pour k entier naturel, la propriété $P(k)$: $B_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{k+1}\, k!}\sqrt{2\pi}$.

La propriété est vraie pour $k = 0$.

En effet $B_{2\times 0} = B_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $\dfrac{(2\times 0)!}{2^{0+1}\times 0!}\sqrt{2\pi} = \dfrac{1}{2\times 1}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ (par convention $0! = 1$).

donc on a $B_{2\times 0} = \dfrac{(2\times 0)!}{2^{0+1}\times 0!}\sqrt{2\pi}$.

Soit k un entier. On suppose la propriété $P(k)$ vraie. On a donc $B_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{k+1}\, k!}\sqrt{2\pi}$

On a montré que pour tout entier n, $B_{n+2} = ((n+2)-1)\,B_{n+2-2} = (n+1)\,B_n$.
Alors comme $2\,(k+1) = 2\,k+2$, on en déduit $B_{2\,(k+1)} = (2\,(k+1)-1)\,B_{2\,k} = (2\,k+1)\,B_{2\,k}$.

Comme par hypothèse de récurrence, $B_{2\,k} = \dfrac{(2\,k)!}{2^{k+1}\,k!}\sqrt{2\,\pi}$, on obtient $B_{2\,(k+1)} = (2\,k+1)\,\dfrac{(2\,k)!}{2^{k+1}\,k!}\sqrt{2\,\pi} = \dfrac{(2\,k+1)\,2\,(k+1)}{2\,(k+1)} \times \dfrac{(2\,k)!}{2^{k+1}\,k!} = \dfrac{(2\,k)!\times(2\,k+1)\times 2\,(k+1)}{2\times 2^{k+1}\times k!\times(k+1)}\sqrt{2\,\pi}$ d'où $B_{2\,(k+1)} = \dfrac{(2\,(k+1))!}{2^{(k+1)+1}\,(k+1)!}\sqrt{2\,\pi}$.

La propriété $P(k+1)$ est vraie. La propriété $P(k)$ est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier k. On a donc $B_{2\,k} = \dfrac{(2\,k)!}{2^{k+1}\,k!}\sqrt{2\,\pi}$ pour tout entier naturel k.

b. Remarquons que pour tout entier naturel n, pour tout réel t, $t^n\,\psi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\chi_n(t)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, pour tout réel positif x, $\displaystyle\int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_0^x \chi_n(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,b_n(x)$ et donc finalement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\lim_{x\to+\infty} b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,B_n$.

On déduit de la question précédente, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^n\,\psi(t)\,dt = \begin{cases} \dfrac{(2\,k)!}{2^{k+1}\,k!} & \text{si } n = 2\,k \\[2ex] \dfrac{2^k\,k!}{\sqrt{2\,\pi}} & \text{si } n = 2\,k+1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{n!}{2^{\frac{n}{2}+1}\left(\frac{n}{2}\right)!} & \text{si } n \text{ pair} \\[2ex] \dfrac{2^{\frac{(n-1)}{2}}\,\frac{(n-1)}{2}!}{\sqrt{2\,\pi}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Remarque: on appelle ces nombres les moments d'ordre n de la loi de probabilité.
Pour $n = 1$, on retrouve l'espérance, pour $n = 2$, la variance et pour $n > 2$, ils permettent de donner d'autres informations probabilistes ou statistiques.

★★★★★ FIN DE LA CORRECTION ★★★★★



ADMISSION AU COLLEGE UNIVERSITAIRE
Mardi 26 juin 2012
MATHEMATIQUES
durée de l'épreuve : 4h

Le problème se compose de 4 parties.

Le sujet comporte 9 pages, y compris celle-ci.

La dernière page sera à rendre avec la copie. N'oubliez pas de coller un code-barres dessus.

Les calculatrices sont autorisées.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur typographique, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population. Le terme population est utilisé ici au sens le plus large : il peut s'agir d'une population d'humains, d'animaux, de plantes, de personnes infectées par un virus, etc. Dans ce problème, on étudie quelques-uns de ces modèles.

Les parties 1, 2, 3 et 4 du problème sont, dans une très large mesure, **indépendantes entre elles**.

Partie 1 : Le modèle de Malthus

Une première approche consiste à considérer que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

1) Modèle discret

Pour tout entier naturel *n*, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année *n* de l'étude (P_n est un réel positif). D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle $k > -1$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout entier naturel *n* :

$$P_{n+1} - P_n = kP_n.$$

a) Justifier que la suite (P_n) ainsi définie est géométrique.

b) Indiquer le sens de variation de la suite (P_n) en fonction de la valeur de *k*.

c) Préciser la limite de la suite (P_n) en fonction de la valeur de *k*.

d) Interpréter les résultats des questions b) et c) en termes d'évolution de population.

2) Modèle continu

On appelle désormais $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant *t* de l'étude (*t* réel appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$). On suppose que la fonction *P* ainsi définie est dérivable et positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante réelle *k* telle que, pour tout réel *t* de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $P'(t) = kP(t)$.

a) Pour tout réel $t \geq 0$, exprimer $P(t)$ en fonction de *t*, *k* et P_0 la population à l'instant $t = 0$.

b) Quel est le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction *P* ? On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de *k*.

c) On se place maintenant dans le cas où $k > 0$. On appelle temps de doublement le temps λ au bout duquel la population a doublé par rapport à la population initiale.
Exprimer λ en fonction de k.
Si la population double en 50 ans, en combien de temps triplera-t-elle ? Justifier.

d) On suppose toujours que $k > 0$. Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\,;T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;T]$.
On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\,;b]$ est donnée par $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.
Calculer la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;T]$.
En déduire la population moyenne sur l'intervalle $[0\,;\lambda]$ en fonction de P_0.

3) Comparaison des deux modèles

On suppose que la population initiale est de 1000 individus et que $k = 0{,}1$.
Comparer les résultats obtenus après 10 ans puis après 100 ans pour chacun des deux modèles.

Le fait que la population augmente de manière exponentielle n'est pas très réaliste. Le taux d'accroissement de la population va diminuer à cause de différents facteurs comme la diminution de l'espace disponible ou des ressources. Il faut donc introduire un facteur d'autorégulation M tenant compte de la capacité d'accueil du milieu.
Dans ce qui suit, on étudie donc les modèles de Verhulst et de Gompertz qui permettent de décrire l'accroissement de la population comme « proportionnel » à l'effectif mais freiné par des ressources limitées.

Partie 2 : Modèle de Verhulst discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n (exprimé en milliers d'individus).
D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante $k > -1$ et une constante M strictement positive telle que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$.

1) Si la suite (P_n) est convergente, quelles sont les valeurs possibles de la limite ?

2) On pose $r = 1 + k$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{k}{rM}P_n$.
Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = ru_n(1-u_n).$$

3) Dans cette question 3), on suppose que $r = 1{,}8$ et $u_0 = 0{,}8$.

a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$ et croissante.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

c) Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population P_n ? Justifier.

4) Dans cette question 4), on suppose que $r = 3{,}2$ et $u_0 = 0{,}8$.

a) Sur le graphique fourni en annexe on a représenté, dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3{,}2x(1-x)$ et la droite d'équation $y = x$. Sur ce graphique, construire, sur l'axe des abscisses, les 4 premiers termes de la suite (u_n). On laissera les traits de construction apparents.

b) Que peut-on conjecturer quant à l'évolution de la suite (u_n) ?

c) À l'aide de la calculatrice, calculer les valeurs arrondies à 10^{-5} près des 6 premiers termes de la suite. Ces résultats confirment-ils la conjecture émise précédemment ?

5) Dans cette question 5), on suppose que $r = 5$ et u_0 est un réel strictement positif.

On suppose qu'il existe un entier p tel que $u_p > 1$.

a) Démontrer que $u_{p+1} < 0$ puis que, pour tout $n \geq p+1$, $u_n < 0$.

b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq p+1}$ est décroissante. On pourra, pour cela, étudier le signe de la fonction $h(x) = 5x(1-x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;0[$.

En déduire que, s'il existe, l'entier p est unique.

c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq p+1}$ n'est pas minorée.

d) En déduire la limite de la suite (u_n).

e) Si $u_0 = 0{,}8$, que peut-on dire de la suite (u_n) ? Justifier.

f) Démontrer que si $u_0 = 0{,}5$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.

Même question avec $u_0 = 0{,}1$.

En programmant le calcul des termes de la suite à l'aide de la calculatrice, démontrer que si $u_0 = 0{,}799999$ alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.

Que peut-on dire de la validité du modèle dans ces différents cas ?

Partie 3 : Modèle de Verhulst continu

On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude (t réel de l'intervalle $[0\,;+\infty[$). On suppose que la fonction P ainsi définie est dérivable et strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ et qu'il existe des constantes k et M strictement positives telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$P'(t)=kP(t)\left(1-\frac{P(t)}{M}\right).$$

On note (E) l'équation différentielle : $y' = ky\left(1-\frac{y}{M}\right)$.

1) On considère la fonction Q définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $Q=\frac{1}{P}$.

   a) Démontrer que P est une solution de l'équation (E) si et seulement si Q est une solution de l'équation différentielle (E') : $y'=-ky+\frac{k}{M}$.

   b) Résoudre (E'). Justifier que les fonctions obtenues sont strictement positives quelle que soit la valeur de la population initiale P_0.

   c) En déduire les solutions de l'équation (E).

2) On suppose désormais que, pour tout réel t positif, $P(t)=\frac{M}{1+C\mathrm{e}^{-kt}}$ où C est une constante réelle.

   a) Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?

   b) Etudier le sens de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ selon le signe de C.

   c) Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$.

   d) Décrire l'évolution de cette population. On distinguera plusieurs cas suivant les valeurs de P_0 et M.

3) Soit T un réel strictement positif. La population moyenne sur l'intervalle de temps $[0\,;T]$ est la valeur moyenne de la fonction P sur l'intervalle $[0\,;T]$. On rappelle que la valeur moyenne μ d'une fonction continue f sur un intervalle $[a\,;b]$ est donnée par $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

   a) Calculer, en fonction de M, C, k et T, la population moyenne, notée μ_T, sur l'intervalle $[0\,;T]$.

   b) Déterminer la limite de μ_T quand T tend vers $+\infty$.

4) On se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative, on appelle point d'inflexion de la courbe C_f un point où la tangente à la courbe C_f traverse la courbe C_f.

   a) Démontrer que le point O est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.

   b) Calculer la dérivée seconde P'' de la fonction P. Montrer que l'équation $P''(t)=0$ admet une unique solution, notée t_0, si et seulement si $C>0$. Démontrer que $t_0=\frac{\ln(C)}{k}$.

   c) Démontrer que, quelles que soient les valeurs des constantes strictement positives M, C et k, le point $A_0\left(t_0;P(t_0)\right)$ appartient à la droite d'équation $y=\frac{M}{2}$.

   d) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P, au point A_0. On note g la fonction affine correspondante.

   e) Étudier la position relative de la courbe représentant la fonction P et de sa tangente au point A_0. On pourra, pour cela, étudier les variations puis le signe de la fonction φ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\varphi(t)=P(t)-g(t)$.

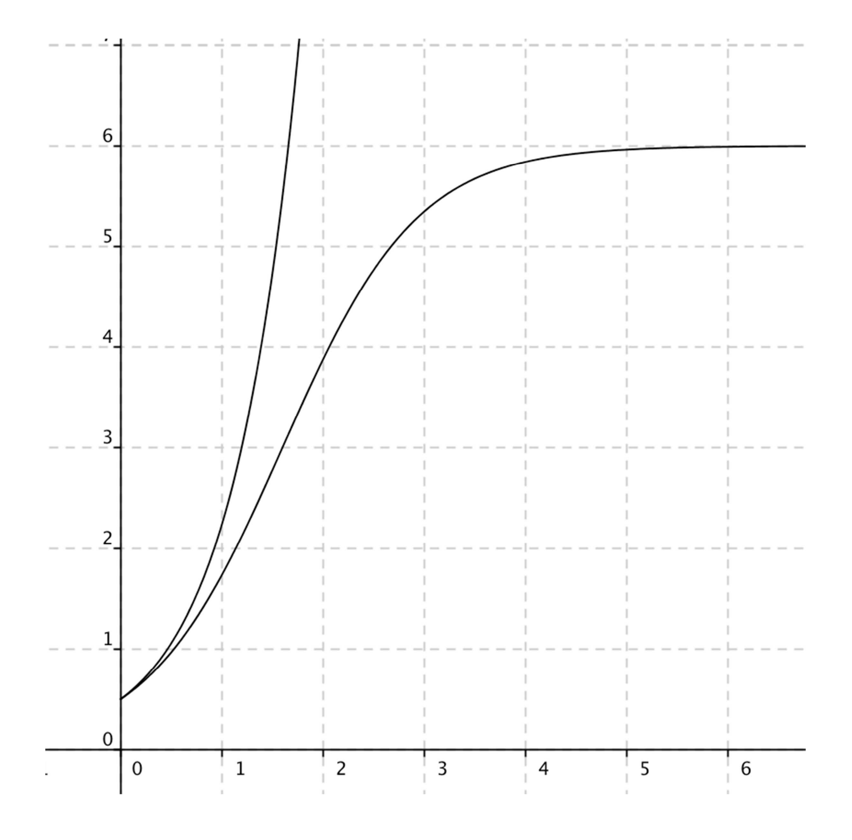
   En déduire que le point A_0 est un point d'inflexion de la courbe représentant la fonction P.

5) Dans cette question, on prend $P_0=0{,}5$, $k=1{,}5$ et $M=6$. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les fonctions $t\to 0{,}5\mathrm{e}^{1{,}5t}$ et $t\to\frac{6}{1+11\mathrm{e}^{-1{,}5t}}$ définies sur $[0\,;+\infty[$.

   a) On considère la fonction d définie sur $[0\,;+\infty[$ par $d(t)=0{,}5\mathrm{e}^{1{,}5t}-\frac{6}{1+11\mathrm{e}^{-1{,}5t}}$. Résoudre l'inéquation $d(t)<0{,}1$.

   Que peut-on dire de ces deux courbes au voisinage de l'origine O ?

   b) A l'aide du graphique ci-dessous, décrire, dans le cas du modèle de Verhulst continu, l'évolution de la population quand son effectif est au voisinage de la moitié de la capacité d'accueil M.



Partie 4 : Modèle de Gompertz

On appelle $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant t de l'étude, et on suppose que P est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. On suppose qu'il existe des constantes k et M avec M strictement positive telles que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on ait :

$$P'(t) = kP(t)\ln\left(\frac{M}{P(t)}\right).$$

1) On considère la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $Q = \ln(P)$.

   a) Démontrer qu'une fonction P est une solution de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\frac{M}{y}\right)$ si et seulement si Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.

   b) Résoudre l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.

   c) En déduire qu'il existe une constante réelle C telle que, pour tout réel t de $[0\,;+\infty[$, $P(t) = M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}}$.

2) Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ en fonction du signe des constantes C et k.

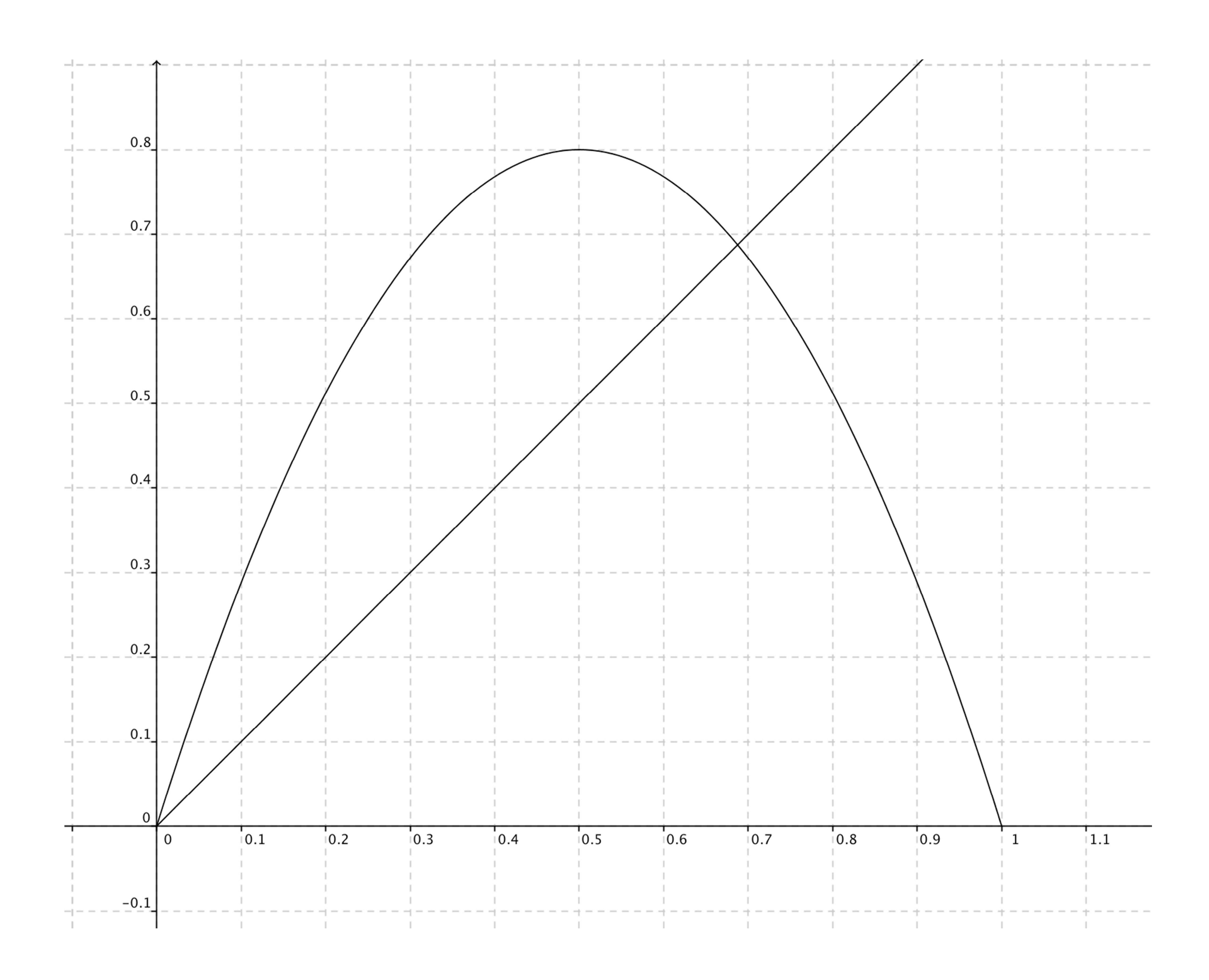
3) Exprimer C en fonction de la population initiale P_0 et de la constante M. De quoi dépend le signe de C ?

4) Un laboratoire étudie l'évolution d'une population animale qui semble en voie d'extinction. La population initiale est de 1000 individus. L'effectif de la population, exprimé en milliers d'individus, est modélisé par une fonction P vérifiant le modèle Gompertz avec $k = -\frac{1}{20}$ et $M = 20$.

a) Comment évolue cette population au cours du temps ? Justifier l'expression « population en voie d'extinction ».

b) Au bout de combien d'années, selon ce modèle, la taille de la population sera inférieure à 10 individus ? Justifier.

Annexe (à rendre avec la copie)



Bilan de l’épreuve de mathématiques – Sciences Po – juin 2012

Le sujet portait sur l’étude de trois modèles mathématiques d’évolution de population. Pour les deux premiers (modèle de Malthus et modèle de Verhulst), une approche discrète suivie d’une approche continue était proposée. Pour le troisième modèle, seule une approche continue était étudiée.

Le problème, conforme au programme de Terminale S **dans la lettre et dans l’esprit**, couvrait une large part du programme d’analyse et proposait des questions de difficultés variables.

Toutefois les candidats ont, semble-t-il, éprouvé des difficultés pour traiter un sujet constitué d’un nombre important de questions enchaînées ; ainsi on observe une dégradation dans la précision des calculs et la qualité de la rédaction au fur et à mesure de la progression dans le sujet. Ceci s’est traduit par une concentration des points de la plupart des copies sur les parties 1 et 2.

Le sujet a paru long et sans doute difficile à traiter dans le temps imparti pour la majorité des candidats. Rappelons ici que les sujets de mathématiques proposés dans un concours ou dans un examen sélectif sont toujours longs et constitués de questions de difficultés variées, de manière à différencier les capacités des candidats. Il n’est, en général, pas nécessaire de traiter la totalité du sujet pour obtenir un résultat tout à fait satisfaisant, et ce fut encore le cas cette année.

Remarques générales

Il y a eu, cette année, moins de « picorage » que l’année passée. Le sujet a souvent été traité dans la continuité et beaucoup de candidats ont abordé toutes les parties.

Toutefois les questions liées aux équations différentielles sont souvent mal réussies et le calcul intégral est mal maîtrisé. Par ailleurs, ce sujet a mis en évidence pour un grand nombre de candidats des lacunes que l’on n’attendrait pas dans des copies d’un examen sélectif à la réputation prestigieuse, par exemple :

- au niveau de la dérivation (dérivée de $\frac{1}{P}$ non réussie par un nombre important de candidats) ;
- au niveau de l’intégration (en particulier la recherche des primitives n’a abouti que chez un tout petit nombre de candidats) ;
- au niveau des calculs (résolution de l’inéquation avec exponentielle réussie par très peu de candidats).

On note, pour la plupart des candidats, un manque de rigueur dans la rédaction :

- manque de justification pour la dérivabilité d’une fonction,
- équivalences utilisées de façon hasardeuse,
- récurrences mal rédigées ou utilisées à tort.

Enfin, les différentes parties du sujet étaient clairement mentionnées comme étant indépendantes entre elles mais un nombre non négligeable de candidats semblent n’avoir pas bien perçu que différents modèles étaient étudiés et ont par conséquent utilisé, à tort,des résultats d’une partie précédente.

Observations sur le traitement des différentes parties

La première partie du sujet a été globalement bien réussie, tout en permettant d'effectuer un premier tri des candidats**.**

Cette partie a permis aux candidats d'engranger des points et de se mettre en confiance.
La question 1) portant sur le modèle discret, où la suite (P_n)étudiée est géométrique, a été dans l'ensemble bien traitée. La question 2) a été traitée de façon inégale.
Certains candidats se trompent à la question 2.a) dans l'expression de la solution de l'équation différentielle $P' = kP$ et, par conséquent, ont des résultats erronés aux questions suivantes. Pour ceux qui traitent correctement la question 2.a), le reste (questions 2 et 3) est dans l'ensemble bien traité.

La partie 2 a permis, elle-aussi, de bien différencier les candidats.
Les candidats, même s'ils n'ont pas abordé toutes les questions de cette partie, ont su répondre correctement à certaines questions de cette partie (étude de fonction, raisonnement par récurrence, utilisation de la calculatrice pour les applications numériques).
Pour la question 4), peu de candidats ont imaginé que la suite pouvait être périodique. La représentation graphique de la suite à la question 4.a) a ainsi dérouté un certain nombre de candidats. A la question 4.b) beaucoup de candidats conjecturent que la suite converge (construction en escargot car peu précise) mais ne conjecturent pas la limite à l'intersection des deux courbes. A la question 4.c), de nombreux candidats ne comprennent pas qu'une conjecture qui n'est pas exactement vérifiée est en faite invalidée.
Il est à noter que, pour la correction, toute conjecture a été prise en compte pourvu que les raisonnements associés soient correctement argumentés
La question 5.c) a été peu traitée et assez mal réussie.

La partie 3 a été plus compliquée pour les candidats.
Les questions 1 et 2 ont été traitées correctement dans environ un quart des copies. En revanche, les candidats n'ont globalement pas traité ou pas su traiter les questions 3, 4 et 5. Bien peu nombreux sont ceux qui ont su déterminer une primitive de la fonction P. De même, très peu de candidats ont compris la notion de point d'inflexion introduite dans le sujet, même dans le cas de la fonction cube.

Enfin, plus de la moitié des candidats n'ont pas abordé la partie 4.

En conclusion, les bonnes copies sont celles de candidats rigoureux, qui ont traité les questions avec méthode, qui ont su bien distinguer les paramètres en jeu et ne pas oublier de cas.

Sciences Po Paris 2012
Mathématiques
Solutions

Partie 1 : Le modèle de Malthus

1. Modèle discret

a. Pour tout entier naturel n, on a $P_{n+1} - P_n = kP_n$ donc $P_{n+1} = (1+k)P_n$.
Par suite la suite (P_n) est géométrique de raison $1+k$.

b. Comme la suite (P_n) est géométrique de raison $1+k$ alors :
• (P_n) est croissante si $1+k > 1$ d'où si $k > 0$;
• (P_n) est constante si $1+k = 1$ c'est à dire $k = 0$;
• (P_n) est décroissante si $0 < 1+k < 1$ d'où $-1 < k < 0$.

c. Comme $P_0 > 0$ et la suite (P_n) est géométrique de raison $1+k$ alors on a :
• si $k+1 > 1$ d'où $k > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$;
• si $k+1 = 1$ d'où $k = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$;
• si $0 < k+1 < 1$ d'où $-1 < k < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$.

d. Interpréter les résultats des questions **b.** et **c.** en termes d'évolution de population.
On déduit des questions précédentes que suivant le modèle de Malthus discret, alors :
• si $k > 0$, la population croit, que cette croissance ne ralentit jamais et que la population augmente indéfiniment ;
• si $k = 0$, la population n'évolue pas ;
• si $-1 < k < 0$, la population décroît et finit par s'éteindre.

2. Modèle continu

a. La fonction P est solution de l'équation différentielle $y' = ky$ donc on sait que $P(t) = Ce^{kt}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
De plus comme $P(0) = P_0$, on en déduit $C = P_0$ d'où $P(t) = P_0e^{kt}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.

b. Comme pour tout $t \in [0; +\infty[$, $P'(t) = kP(t)$ et que $P(t) \geqslant 0$, alors $P'(t)$ est du signe de k.
Ainsi :
• si $k > 0$, la fonction P est croissante sur $[0; +\infty[$;
• si $k = 0$, la fonction P est constante égale à P_0 sur $[0; +\infty[$;
• si $k < 0$, la fonction P est décroissante sur $[0; +\infty[$.

c. On a λ défini par $P(\lambda) = 2P_0$ d'où $P_0 \mathrm{e}^{k\lambda} = 2P_0$.
On obtient donc $k\lambda = \ln(2)$ d'où $\lambda = \frac{\ln(2)}{k}$.
La population double en 50 ans donc $\lambda = 50$ans ainsi $k = \frac{\ln(2)}{50}$.
Par suite l'instant t tel que $P(t) = 3P_0$ est solution de l'équation $P_0 \mathrm{e}^{\frac{\ln(2)}{50}t} = 3P_0$.
On obtient donc $\frac{\ln(2)}{50}t = \ln(3)$ d'où $t = 50\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 79,2$ans.
On peut remarquer que P_0 n'intervient pas dans le résultat. Ainsi quel que soit le moment, la population aura doublé en 50 ans et triplé en $\approx 79,2$ans.
d. Soit $k > 0$.
On a $\mu = \frac{1}{T-0}\int_0^T P_0 \mathrm{e}^{kt}dt$ d'où $\mu = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{k}\mathrm{e}^{kt}\right]_0^T = \frac{P_0}{kT}\left(\mathrm{e}^{kT} - 1\right)$.
On a λ tel que $\mathrm{e}^{k\lambda} = 2$ et $\lambda = \frac{\ln(2)}{k}$ donc la population moyenne sur $[0;\lambda]$ est donnée par $\mu = \frac{P_0}{k \times \frac{\ln(2)}{k}}(2-1) = \frac{P_0}{\ln(2)} \approx 1,44P_0$.
3. Comparaison des deux modèles
On a montré que pour le modèle discret, P_n est une suite géométrique de raison $1 + k = 1,1$ et de premier terme $P_0 = 1\,000$ donc pour tout entier naturel n, $P_n = 1000 \times (1,1)^n$.
Par suite $P_{10} \approx 2\,594$ individus et $P_{100} = 13\,780\,612$ individus.
Pour le modèle continu, on obtient $P(10) = 2\,718$ individus et $P(100) = 22\,026\,466$ individus.
Le modèle continu augmente plus vite que le modèle discret.
Pour 10 années écoulées, les 2 résultats obtenus sont presque du même ordre de grandeur mais pour 100 ans le modèle continu donne une population pas loin du double de celle obtenue avec le modèle discret.

Partie 2 : Modèle de Verhulst discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n (exprimé en milliers d'individus).
D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe une constante $k > -1$ et une constante M strictement positive telles que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$.
1. Pour tout entier naturel n, on a $P_{n+1} - P_n = kP_n\left(1 - \frac{P_n}{M}\right)$ d'où $P_{n+1} = (1+k)P_n - \frac{k}{M}{P_n}^2 = f(P_n)$ avec $f(x) = (1+k)x - \frac{k}{M}x^2$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc si la suite (P_n) converge vers ℓ, on sait que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Or l'équation $f(x) = x$ revient à $(1+k)x - \frac{k}{M}x^2 = x$ d'où $kx\left(1 - \frac{1}{M}x\right) = 0$.
Cette équation admet donc 2 solutions : $x = 0$ et $x = M$.
Par conséquent si la suite (P_n) converge, elle converge vers 0 ou vers M.
2. On pose $r = 1 + k$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{k}{rM}P_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $u_{n+1} = \frac{k}{rM}P_{n+1} = \frac{k}{rM}\left[(1+k)P_n - \frac{k}{M}{P_n}^2\right] = \frac{k}{M}P_n - \frac{1}{r}\left(\frac{k}{M}P_n\right)^2 = ru_n - \frac{1}{r}\left(ru_n\right)^2 = ru_n\left(1 - u_n\right)$.
3.a. ***Préliminaires :***

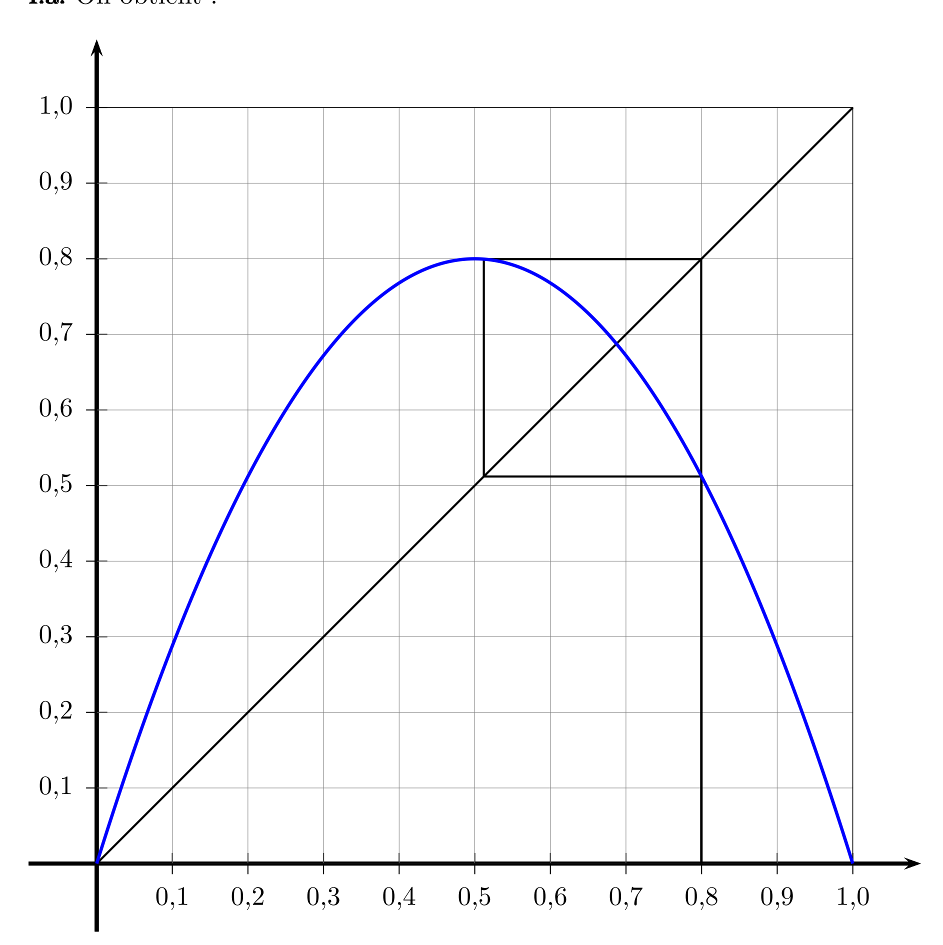
On définit la fonction $g_{1,8}$ par $g_{1,8}(x) = 1,8x(1-x)$.
La fonction g est une fonction du second degré dont les racines sont 0 et 1 et le coefficient des x^2 est $-1,8 < 0$.
Par suite on sait que la fonction $g_{1,8}$ admet un maximum atteint en $x_0 = \frac{-1,8}{2\times(-1,8)} = \frac{1}{2}$ égal à $g_{1,8}(\frac{1}{2}) = 1,8 \times \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 0,45$ et que g est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
On définit la proposition $\mathcal{Q}(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
On sait que $u_0 = 0,8$ d'où $u_1 = 0,288 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.
On a alors $u_2 = 0{,}369\,100\,8 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et de plus $u_1 \leqslant u_2$.
La proposition $\mathcal{Q}(1) : 0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \frac{1}{2}$ est donc vraie.
Soit n un entier naturel non nul.
On fait l'hypothèse de récurrence $\mathcal{Q}(n)$ est vraie. On a donc $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
Alors comme par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $u_{n+1} \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$ et comme la fonction $g_{1,8}$ est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, on obtient $g_{1,8}(0) \leqslant g_{1,8}(u_n) \leqslant g_{1,8}(u_{n+1}) \leqslant g_{1,8}(\frac{1}{2})$ d'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.
La proposition $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie, la proposition $\mathcal{Q}(n)$ est donc héréditaire.
D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{Q}(n)$ étant vraie pour $n = 1$ et héréditaire pour $n \geqslant 1$, est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
Par suite pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
On en déduit que :
- pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$ donc la suite $(u_n)\, n \geqslant 1$ est majorée par $\frac{1}{2}$;
- pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.

b. La suite (u_n) est croissante et majorée.
Elle est donc convergente.
Alors comme on sait que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = g_{1,8}(u_n)$ avec $g_{1,8}$ fonction continue sur $\mathbb{R}$, la limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation $x = g_{1,8}(x)$.
Résolvons cette équation.
L'équation $x = g_{1,8}(x)$ s'écrit $x = 1,8x(1-x)$ d'où $1,8x^2 - 0,8x = 0$ et donc $x(1,8x - 0,8) = 0$.
L'équation admet donc deux solutions $x = 0$ et $x = \frac{0,8}{1,8} = \frac{4}{9}$.
On en déduit que $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{4}{9}$.
Neanmoins comme $u_1 = 0,228 > 0$ et que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0,288$ d'où $\ell \geqslant 0,288 > 0$.
Par conséquent $\ell = \frac{4}{9}$.

c. On a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{9}$ et pour tout entier naturel n, $P_n = \frac{Mr}{k}u_n = \frac{M\times 1,8}{1,8-1}u_n = \frac{9}{4}Mu_n$.
Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{9}{4}M \times \frac{4}{9} = M$.
à long terme, la population a tendance à se stabiliser vers la constante M.
On peut considérer que suivant ce modèle M représente la capacité d'acceuil du milieu dans lequel cette population vit.

4. Dans cette question **4.**, on suppose que $r = 3,2$ et $u_0 = 0,8$.

4.a. On obtient :



b. La suite semble osciller entre 2 valeurs : $\approx 0,8$ et $\approx 0,51$.
c. On obtient :

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
0,800 000 0	0,512 000 0	0,799 539 2	0,512 884 1	0,799 468 8	0,513 019 0

Les résultats montrent que les valeurs obtenus diffèrent légèrement.
La sous-suite des termes de rang pairs décroît légèrement à partir de 0,8 et la sous-suite des termes de rang impairs croît légèrement à partir de 0,512.

Remarque :
On peut montrer qu'en fait la suite converge vers la solution non nulle de l'équation $3,2x(1-x) = x$, c'est dire 0,687 5.
Néanmoins la convergence dans ce cas est très lente.

5.a. Pour tout entier n, on a $u_{n+1} = g_5(u_n)$ avec $g_2 : x5x(1-x)$.
La fonction g_2 est une fonction du second degré dont le coefficient des x^2 est

$-5 < 0$.
Elle est donc strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et strictement croissante sur $]-\infty; 0]$.
Par suite si $u_p > 1 > \frac{1}{2}$, $g_5\left(u_p\right) < g_5(1)$ d'où $u_{p+1} < 0$.
Démontrons par récurrence sur $n \geqslant p+1$ que $u_n < 0$.
On a montré que $u_{p+1} < 0$: la proposition est vraie au rang $p+1$.
Soit alors un entier $n \geqslant p+1$.
On fait l'hypothèse de récurrence $u_n < 0$.
Alors comme $u_n \in]-\infty\ ;\ 0[$, et comme g_5 est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on obtient $g_5\left(u_n\right) < g_5(0)$ d'où $u_{n+1} < 0$.
La proposition est héréditaire.
D'après l'axiome de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant p+1$.
Par suite pour tout entier $n \geqslant p+1$, $u_n < 0$.
b. On définit la fonction h par $h(x) = 5x(1-x) - x$ pour x appartenant à l'intervalle $]-\infty; 0]$.
On a donc $h(x) = -5x^2 + 4x$ pour tout réel $x \leqslant 0$.
Il est clair que pour tout réel $x \leqslant 0$, $-5x^2 \leqslant 0$ et de plus $4x \leqslant 0$ donc $h(x) \leqslant 0$.
Remarquons alors que pour tout entier $n \geqslant p+1$, comme d'après la question précédente, $u_n \in]-\infty; 0[$, alors $h\left(u_n\right) \leqslant 0$.
Or $h\left(u_n\right) = g_5\left(u_n\right) - u_n = u_{n+1} - u_n$.
Par suite pour tout $n \geqslant p+1$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$: la suite $\left(u_n\right)$ est donc décroissante.
c. On raisonne par l'absurde.
On suppose la suite minorée.
Alors elle est décroissante minorée et donc convergente.
Comme pour tout entier n, $u_{n+1} = g_5\left(u_n\right)$ et que g_5 est continue sur $\mathbb{R}$, on sait donc que la limite ℓ de la suite est une solution de l'équation $g_5(x) = x$.
Donc de l'équation $5x^2 - 4x = 0$ c'est à dire $x(5x-4) = 0$.
Par suite $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{4}{5}$.
Or pour tout entier $n \geqslant p+1$, $u_n \leqslant u_{p+1} < 0$ donc $\ell \leqslant u_{p+1} < 0$: contradiction.
Par conséquent le suite $\left(u_n\right)$ n'est pas minorée.
d. La suite $\left(u_n\right)_{n \geqslant p+1}$ est décroissante non minorée donc elle diverge vers $-\infty$.
En effet, quel que soit le réel M, il existe un entier N_M tel que $u_{N_M} < M$.
De plus comme la suite est décroissante, alors pour tout entier $n \geqslant N_M$, $u_n \leqslant u_{N_M} < M$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
e. Si $u_0 = 0,8$, on remarque que $u_1 = 0,8$.
Montrons par récurrence que $\left(u_n\right)$ est constante égale à $0,8$.
La propriété est vraie au rang $n = 0$.
Soit n un entier. Supposons que $u_n = 0,8$.
Alors $u_{n+1} = 5 \times 0,8(1-0,8) = 5 \times 0,8 \times 0,2 = 0,8$.
La proposition est donc héréditaire.
Elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
f. Pour $u_0 = 0,5$, on obtient $u_1 = 5 \times 0,5(1-0,5) = 1,25 > 1$ donc l'entier $p = 1$ convient.
Si $u_0 = 0,1$, alors $u_1 = 5 \times 0,1 \times (1-0,1) = 0,45$ d'où $u_2 = 5 \times 0,45 \times (1-0,45) =$

$1,2375 > 1$ donc l'entier $p = 2$ convient.
En programmant le calcul des termes de la suite à l'aide de la calculatrice, démontrer que si $u_0 = 0{,}799\,999$, alors il existe un entier p, dont on donnera la valeur, tel que $u_p > 1$.
On obtient $u_{17} \approx 1{,}133\,741 > 1$ et $u_{16} \approx 0{,}347\,515 < 1$ donc $p = 17$ convient.
Un exemple de programme, en langage naturel :

Variables :	u, n
Initialisation	0,799 999->u 0->n
Traitement	Tant que u<1 faire 5u(1-u)->u n+1->n Fin Tant que
Sortie	Afficher n

Les 3 exemples étudiés montre que la validité du modèle de Verhulst discret dépend fortement de la valeur de k.
Dans le premier cas, on obtient un modèle raisonnable.
Dans le deuxième cas, le modèle correspond moins bien à ce que l'on pourrait penser. La population oscille entre 2 valeurs autour de la capacité d'acceuil.
Dans le dernier cas, ou la population n'évolue pas, ou elle disparaît.

Partie 3 : Modèle de Verhulst continu

1.a. On suppose que P est solution de (E).
On a donc $P'(t) = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)$.
D'autre part comme $P(t) > 0$ pour tout $t \in [0; +\infty[$ donc la fonction $Q = \frac{1}{P}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $t \in [0; +\infty[$, $Q'(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)^2}$.
Par suite $Q'(t) = -\frac{kP(t)\left(1-\frac{P(t)}{M}\right)}{P(t)^2} = -\frac{k}{P(t)} + \frac{k}{M} = -kQ(t) + \frac{k}{M}$.
Donc Q est solution de (E').
Réciproquement, soit Q une solution de (E') : on a donc $Q'(t) = -kQ(t) + \frac{k}{M}$ d'où comme $Q = \frac{1}{P}$ et donc $Q' = -\frac{P'}{P^2}$, on obtient $-\frac{P'(t)}{P(t)^2} = -\frac{k}{P(t)} + \frac{k}{M}$ d'où $P'(t) = kP(t) + \frac{k}{M}P(t)^2 = kP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{M}\right)$ d'où P est solution de (E).
b. L'équation (E') est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants donc on sait que les solutions de l'équation (E') sont les fonctions de la forme $Q : tQ(t) = C\mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}, C \in \mathbb{R}$.
D'autre part on sait que $P(0) = P_0$ d'où $Q(0) = \frac{1}{P(0)} = \frac{1}{P_0}$ et donc la constante

C vérifie $C + \frac{1}{M} = \frac{1}{P_0}$ d'où $C = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}$.
Ainsi l'équation (E') admet pour unique solution la fonction $Q : tQ(t) = \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}\right) \mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}$.
Pour tout $t \in [0; +\infty[$, $Q(t) = \frac{1}{P_0}\mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$.
Or pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-kt} \leqslant 1$ d'où $\frac{1}{M}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) \geqslant 0$ d'où comme $\frac{1}{P_0}\mathrm{e}^{-kt} > 0$, $Q(t) > 0$.
Donc les fonctions obtenues sont strictement positives sur $[0; +\infty[$ quelle que soit la valeur de la population initiale P_0.
c. On sait que P est solution de (E) si et seulement si $Q = \frac{1}{P}$ est solution de (E').
Par suite comme les solutions de (E') sont les fonctions $Q : t \left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}\right) \mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}$ avec $Q(t) > 0$ pour tout $t \in [0; +\infty[$, on en déduit que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions P définies par $P(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}\right)\mathrm{e}^{-kt} + \frac{1}{M}} = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{P_0} - 1\right)\mathrm{e}^{-kt}}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
2.a. On a $P_0 = \frac{M}{1+C}$ d'où $(1 + C)P_0 = M$ et donc $C = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{M}{P_0} - 1$.
On en déduit donc que $C > 0$ si $\frac{M}{P_0} > 1$ d'où $M > P_0$, $C = 0$ si $M = P_0$ et $C < 0$ si $M < P_0$.
Le signe de C dépend donc de la position de P_0 par rapport à M.
b. Pour tout réel $t \in [0; +\infty[$, $P(t) = \frac{M}{1 + C\mathrm{e}^{-kt}}$ d'où $P'(t) = -\frac{-kMC\mathrm{e}^{-kt}}{(1 + C\mathrm{e}^{-kt})^2} = C\frac{kM\mathrm{e}^{-kt}}{(1 + C\mathrm{e}^{-kt})^2}$.
On sait que $\mathrm{e}^{-kt} > 0$, $\left(1 + C\mathrm{e}^{-kt}\right)^2 > 0$, $M > 0$, $k > 0$ donc $P'(t)$ est du signe de C .
Donc :
- si $C > 0$, P est strictement croissante sur $[0; +\infty[$;
- si $C = 0$, P est constante égale à $M = P_0$ sur $[0; +\infty[$;
- si $C < 0$, P est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

c. On a $\lim\limits_{t \to +\infty} - kt = -\infty$ car $k > 0$ et on sait que $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0$ d'où $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-kt} = 0$.
Par suite $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + C\mathrm{e}^{-kt} = 1 \neq 0$ et ainsi $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{M}{1 + C\mathrm{e}^{-kt}} = M$.
d. D'après l'étude précédente, on déduit donc :
- si $P_0 < M$, la population croît et se rapproche de M ;
- si $P_0 = M$, la population est constante égale à M ;
- si $P_0 > M$, la population décroît et se rapproche de M.

On peut donc dire que M représente la population d'équilibre du milieu considéré et que dans tous les cas, la population tend vers cette population d'équiibre.
3.a. On a $\mu_T = \frac{1}{T-0}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{M}{1 + C\mathrm{e}^{-kt}}\,dt = \frac{M}{kT}\int_0^T \frac{k\mathrm{e}^{kt}}{\mathrm{e}^{kt} + C}\,dt = \frac{M}{kT}\ln\left(\mathrm{e}^{kt} + C\right)\Big]_0^T = \frac{M}{kT}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{kT} + C\right) - \ln(1 + C)\right)$.
b. Pour tout $T \in [0; +\infty[$, on a $\mu_T = \frac{M}{kT}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{kT} + C\right) - \ln(1 + C)\right) = \frac{M}{kT}\left(\ln\left(\mathrm{e}^{kT}\right) + \ln\left(1 + C\mathrm{e}^{-kT}\right) + \ln(1 + C)\right) = M + \frac{\ln\left(1 + C\mathrm{e}^{-kT}\right) + \ln(1 + C)}{kT}$.

Or $\lim_{T\to+\infty} 1+C\mathrm{e}^{-kT}=1$ d'où $\lim_{T\to+\infty} \ln\left(1+C\mathrm{e}^{-kT}\right)+\ln(1+C)=\ln(1+C)$ et comme $\lim_{T\to+\infty} kT=+\infty$ alors $\lim_{T\to+\infty} \frac{\ln\left(1+C\mathrm{e}^{-kT}\right)+\ln(1+C)}{kT}=0$.
Finalement $\lim_{T\to+\infty} \mu_T = M$.

4. On se place dans un repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.
Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, on appelle point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$ un point où la tangente à la ocurbe $\mathcal{C}_f$ traverse la courbe $\mathcal{C}_f$.

4.a. La tangente à la courbe représentative de la fonction cube au point O a pour équation $y=\left(3\times 0^2\right)(x-0)+0^3=0$.
De plus pour $x<0$, $x^3-y=x^3<0$ et pour $x>0$, $x^3-y=x^3>0$.
donc la courbe représentative de la fonction cube est en-dessous de sa tangente au point O sur $]-\infty;0]$ et au-dessus sur $[0;+\infty[$.
La tangente au point O de la courbe représentative de la fonction cube traverse donc cette courbe. Le point O est un point d'inflexion pour la courbe représentative de la fonction cube.

b. On a montré que $P'(t)=\frac{kCM\mathrm{e}^{-kt}}{(1+C\mathrm{e}^{-kt})^2}$ donc
$P''(t)=\frac{-k^2CM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)^2-kCM\mathrm{e}^{-kt}\times 2\left(-kC\mathrm{e}^{-kt}\right)\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{(1+C\mathrm{e}^{-kt})^4}$
d'ou $P''(t)=\frac{k^2CM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{(1+C\mathrm{e}^{-kt})^4}\left(-\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)+2C\mathrm{e}^{-kt}\right)=$
$\frac{kCM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{(1+C\mathrm{e}^{-kt})^4}\left(C\mathrm{e}^{-kt}-1\right)$.

On sait que :
• $\mathrm{e}^{-kt}>0$
• $1+C\mathrm{e}^{-kt}>0$
Donc $\frac{kCM\mathrm{e}^{-kt}\left(1+C\mathrm{e}^{-kt}\right)}{(1+C\mathrm{e}^{-kt})^4}>0$.
Par suite $P''(t)=0$ si et seulement si $C\mathrm{e}^{-kt}-1=0$.
Si $C<0$, alors $C\mathrm{e}^{-kt}<0$ d'où $C\mathrm{e}^{-kt}-1<-1<0$: l'équation $C\mathrm{e}^{-kt}-1=0$ n'admet pas de solution.
Si $C=0$, l'équaiton devient $-1=0$ et donc n'admet pas de solution.
Finalement si $C>0$, alors $\mathrm{e}^{-kt}=\frac{1}{C}>0$ d'où $-kt=\ln\left(\frac{1}{C}\right)$ et donc $t=\frac{\ln(C)}{k}$.
Par suite l'équation $P''(t)=0$ admet une unique solution, notée t_0, si et seulement si $C>0$ et $t_0=\frac{\ln(C)}{k}$.

c. Comme $C>0$, t_0 est bien défini.
On a alors $P\left(t_0\right)=\frac{M}{1+C\mathrm{e}^{-k\frac{\ln(C)}{k}}}=\frac{M}{1+C\mathrm{e}^{-\ln(C)}}=\frac{M}{1+\frac{C}{C}}=\frac{M}{2}$.
Donc quelles que soient les valeurs des constantes strictement positives M, C et k, le point $A\left(t_0;P\left(t_0\right)\right)$ appartient à la droite d'équation $y=\frac{M}{2}$.

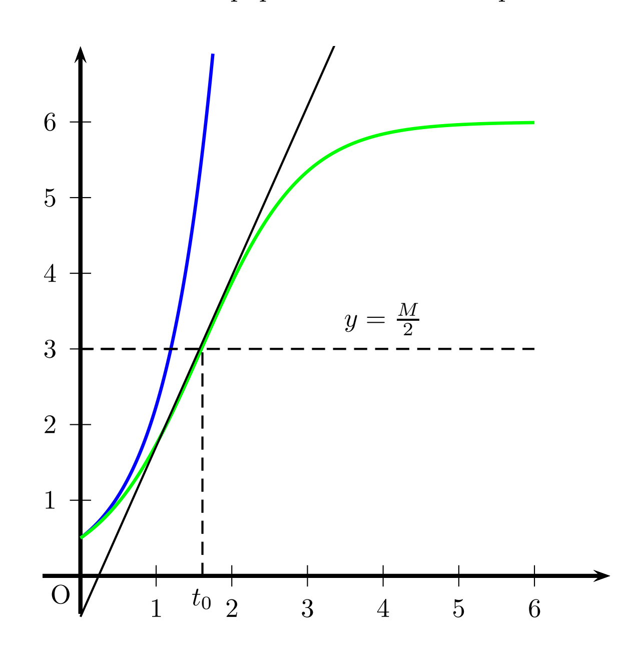
d. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P au point A_0 est donnée par $y=P'\left(t_0\right)\left(x-t_0\right)+P\left(t_0\right)$.
Or $P\left(t_0\right)=\frac{M}{2}$ (question précédente) et $P'\left(t_0\right)=\frac{kCM\mathrm{e}^{-k\frac{\ln(C)}{k}}}{\left(1+C\mathrm{e}^{-k\frac{\ln(C)}{k}}\right)^2}=\frac{kCM\times\frac{1}{C}}{\left(1+C\times\frac{1}{C}\right)^2}=$

$\frac{kM}{4}$.
Par suite l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction P au point A_0 est $y = \frac{kM}{4}\left(x - \frac{\ln(C)}{k}\right) + \frac{M}{2} = \frac{kM}{2}x + \frac{M}{4}(2 - \ln(C))$.
On a donc $g(t) = \frac{kM}{4}t + \frac{M}{4}(2 - \ln(C))$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
e. étudier la position relative de la courbe représentant la fonction P et de sa tangente au point A_0.
Soit la fonction φ définie sur $[0; +\infty[$ par $\varphi(t) = P(t) - g(t)$.
La fonction φ est dérivable et pour tout $t \in [0; +\infty[$, $\varphi'(t) = P'(t) - g'(t) = P'(t) - \frac{kM}{2}$ et $\varphi''(t) = P''(t)$.
On a montré que $P''(t) = \frac{kC M e^{-kt}\left(1+Ce^{-kt}\right)}{(1+Ce^{-kt})^4}\left(Ce^{-kt} - 1\right)$ avec $\frac{kCMe^{-kt}\left(1+Ce^{-kt}\right)}{(1+Ce^{-kt})^4} > 0$.
Donc le signe de $P''(t)$ est donné par celui de $Ce^{-kt} - 1$.
Or $Ce^{-kt} - 1 > 0$ si $e^{-kt} > \frac{1}{C}$ d'où si $-kt > \ln\left(\frac{1}{C}\right)$ et donc si $t < t_0$(défini à la question **4.b.**).
On en déduit que φ' est croissante sur $[0; t_0]$ et décroissante sur $[t_0; +\infty[$.
Or $\varphi'(t_0) = P'(t_0) - \frac{kM}{2} = 0$ donc on obtient que $\varphi'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
La fonction φ est donc décroissante sur $[0\ ; +\infty[$.
Or $\varphi(t_0) = 0$ donc pour tout $t \in [0; t_0]$, $\varphi(t) \geqslant 0$ et pour tout $t \in [t_0; +\infty[$, $\varphi(t) \leqslant 0$.
On en déduit que la courbe représentative de P est au-dessus de sa tangente sur $[0; t_0]$ et en dessous sur $[t_0; +\infty[$.
Par suite la courbe représentative de P traverse sa tangente en A_0.
Le point A_0 est donc un point d'inflexion.
5.a. L'inéquation $d(t) < 0,1$ revient à $\frac{0,5e^{1,5t}\left(1+11e^{-1,5t}\right)-6}{1+11e^{-1,5t}} < 0,1$ d'où comme $1 + 11e^{-1,5t} > 0$, il faut $0,5e^{1,5t} - 0,5 < 0,1 + 1,1e^{-1,5t}$.
On en déduit $\frac{0,5\left(e^{1,5t}\right)^2-0,6e^{1,5t}-1,1}{e^{1,5t}} < 0$ d'où comme $e^{1,5t} > 0$, $0,5\left(e^{1,5t}\right)^2 - 0,6e^{1,5t} - 1,1 < 0$.
On pose $X = e^{1,5t}$ et l'équation revient donc à $0,5X^2 - 0,6X - 1,1 < 0$.
Le discriminant de cette eequation du second degré est $\Delta = (-0,6)^2 - 4 \times 0,5 \times (-1,1) = 2,56 > 0$.
Donc le trinôme du second degré $0,5X^2 - 1,5X - 11$ admet deux racines : $X_1 = \frac{0,6-1,6}{2\times0,5} = -1$ et $X_2 = 2,2$ par suite comme de plus le coefficient des X^2 est $0,5 > 0$ alors on sait que $0,5X^2 - 0,6X - 1,1 < 0$ pour $X \in]-1; 2,2[$.
Enfin comme $X = e^{1,5t}$ alors il faut t tel que $e^{1,5t} \in]-1; 2,2[$ d'où

$$t \in \left]-\infty\ ;\ \frac{\ln(2,2)}{1,5}\right[.$$

On a $\frac{\ln(2,2)}{1,5} \approx 0,52$ donc d'après la résolution précédente, pour tout réel $x < 0,52$, les points de chaque courbe d'abscisse x sont à une distance strictement inférieure à 0,1.
Les deux courbes sont donc presque confondues au voisinage de 0.
b. On étudie donc l'évolution de la population lorsque l'effectif est au voisinage de la moitié de la capacité d'accueil M, c'est à dire lorsque l'on est au voisinage

du point A_0 sur la courbe.
La courbe admet un changement de concavité, le point A_0 étant un point d'inflexion.
La croissance de la population change de rythme.
On passe d'une croissance toujours plus rapide jusqu'à t_0 à une croissance qui va être de moins en moins rapide après t_0.
La rapidité de croissance de la population atteint son point culminant en t_0.



Partie 4 : Modèle de Gompertz

1.a. Soit P une solution strictement positive de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\frac{M}{y}\right)$.
Alors $Q = \ln(P)$ est dérivable et l'on a $Q' = \frac{P'}{P}$.
Par suite $Q' = \frac{kP\ln\left(\frac{M}{P}\right)}{P} = k(\ln(M) - \ln(P)) = -kQ + k\ln(M)$.
Donc Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.
Réciproquement supposons que Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.
Alors comme $Q = \ln(P)$, $Q' = \frac{P'}{P}$ d'où $\frac{P'}{P} = -k\ln(P) + k\ln(M)$ d'où comme $P > 0$, $P' = kP(\ln(M) - \ln(P)) = kP\ln\left(\frac{M}{P}\right)$.
Partant une fonction P est une solution de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\frac{M}{y}\right)$ si et seulement si Q est solution de l'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$.
b. L'équation différentielle $y' = -ky + k\ln(M)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants donc ses solutions sont les fonctions Q définies par $Q(t) = C\mathrm{e}^{-kt} - \ln(M)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

c. D'après la question **1.a.**, on déduit du résultat précédent que toute solution P de l'équation différentielle $y' = ky\ln\left(\frac{M}{y}\right)$ est telle que $\ln(P(t)) = C\mathrm{e}^{-kt} - \ln(M)$ avec $C \in \mathbb{R}$ et $t \in [0;+\infty[$.
D'où $P(t) = \mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}-\ln(M)} = M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}}$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ en fonction du signe des constantes C et k.
Si $k > 0$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} -kt = -\infty$ et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-kt} = 0$.
Par suite $\lim\limits_{t\to+\infty} M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}} = M$.
Si $k = 0$, alors $P(t) = M\mathrm{e}^{C}$ pour tout $t \in [0;+\infty[$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = M\mathrm{e}^{C}$.
Si $k < 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} -kt = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-kt} = +\infty$.
Par suite si de plus $C > 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} C\mathrm{e}^{-kt} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}} = +\infty$ et si $C < 0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} C\mathrm{e}^{-kt} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-kt}} = 0$.

En résumé $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \begin{cases} M \mathrm{si} k > 0, \forall C \in \mathbb{R} \\ M\mathrm{e}^{C} \mathrm{si} k = 0 \\ +\infty \mathrm{si} k < 0 \mathrm{et} C > 0 \\ 0 \mathrm{si} k < 0 \mathrm{et} C < 0 \end{cases}$.

3. On a $P_0 = P(0)$ d'où $P_0 = M\mathrm{e}^{C\mathrm{e}^{-k\times 0}}$.
Par suite $\mathrm{e}^{C} = \frac{P_0}{M}$ d'où comme $\frac{P_0}{M} > 0$, $C = \ln\left(\frac{P_0}{M}\right) = \ln(P_0) - \ln(M)$.
Rappelons que $\ln(x) < 0$ si ete seulement si $x \in]0;1[$, $\ln(1) = 0$ et $\ln(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$.
Par suite $C < 0$ si et seulement si $\frac{P_0}{M} < 1$ d'où $P_0 < M$, $C = 0$ si $P_0 = M$ et $C > 0$ si $P_0 > M$.
Le signe de C dépend donc de la position de la population initiale par rapport à la capacité d'accueil M.
4.a. La population étudiée est donc modélisée par la fonction $P(t) = 20\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{20}\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}} = 20\mathrm{e}^{-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}}$.
La fonction $t\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ donc, comme $-\ln(20) < 0$, la fonction $t - \ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et donc par composition, $t\mathrm{e}^{-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}}$ est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
La population diminue.
De plus d'après la question **2.**, comme $k < 0$ et $C < 0$, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = 0$ donc la population décroît vers 0.
Elle est donc en voie d'extinction puisque si elle continue à suivre le modèle de Gompertz, alors au bout d'un certain temps son effectif est proche de 0.
b. On résout l'équation $P(t) \leqslant 0,01$ (10 individus correspondent à 0,01 milliers).
On obtient $20\mathrm{e}^{-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}} \leqslant 0,01$ d'où :
$\mathrm{e}^{-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}}} \leqslant \frac{1}{2000}$
$-\ln(20)\mathrm{e}^{\frac{t}{20}} \leqslant -\ln(2000)$

$e^{\frac{t}{20}} \geqslant \frac{\ln(2000)}{\ln(20)}$
$\frac{t}{20} \geqslant \ln\left(\frac{\ln(2000)}{\ln(20)}\right)$
$t \geqslant 20\ln\left(\frac{\ln(2000)}{\ln(20)}\right)$
Alors comme $20\ln\left(\frac{\ln(2000)}{\ln(20)}\right) \approx 18,62$, il faudra 19 années pour que la population devienne inférieure à 10 individus.

Préparation à l'entrée à Sciences-Po 2013

Exemples de sujets de vrai/faux :

(niveau première S + suites et fonctions ln et exp)

1. L'équation $e^x - e^{-x} - 2 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
2. Pour tout x réel, on a $\ln(e^x) = x$.
3. Pour tout x réel, on a $e^{\ln(x)} = x$.
4. Une suite décroissante et à valeurs positives tend vers 0.
5. Pour tout entier $n \geqslant 2$; $n^2 \geqslant 2^n$.
6. Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ alors la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante quelle que soit la valeur de u_0.
7. Si la suite (u_n) est convergente et strictement positive alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est convergente.
8. Tout nombre entier de trois chiffres dont les chiffres des centaines, dizaines et unités sont les mêmes est divisible par 37.
9. La section d'un cylindre de rayon 5 cm et de hauteur 8 cm par un plan parallèle à son axe peut être un carré.
10. A et B sont deux évènements qui vérifient : $P(A) = \dfrac{3}{5}$; $P_A(B) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,2$; alors $P_B(A) = \dfrac{3}{8}$.
11. $ax^2 + bx + c$ est un trinôme $(a \neq 0)$ et Δ son discriminant.
    - **a.** Si $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout nombre réel , alors $\Delta < 0$.
    - **b.** Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout nombre réel x.
12. (u_n) est une suite à termes strictement positifs.

    Pour tout entier n on définit v_n par : $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$.

    Si la suite (u_n) est bornée alors la suite (v_n) est bornée.

Préparation à l'entrée à Sciences-Po 2013

Merci à la mégamathienne qui nous a proposé cette solution le 10 mars 2013. Je la place tout de suite sur le site MégaMaths :)

1- FAUX

$e^x - e^{-x} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x} - 1 - 2e^x = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$

Posons $Y = e^x$ alors on a l'équation $Y^2 - 2Y - 1 = 0$

On calcule Δ

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$ donc il existe deux racines réelles distinctes

$Y_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$ et $Y_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} > 0$

$Y = e^x \Leftrightarrow x = \ln Y$ si $Y > 0$

Ainsi comme seul Y_2 est positif, il n'existe qu'un seul x solution de l'équation $e^x - e^{-x} - 2 = 0$ et c'est $x = \ln(1+\sqrt{2})$

2- VRAI

3- FAUX

C'est pour tout réel x strictement positif

4- FAUX

Contre exemple : (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 0{,}001$

5- FAUX

Si $n = 5$, on a $5^2 = 25$ et $2^5 = 32$ donc $5^2 < 2^5$

6- ~~VRAI~~ ← C'est faux car f peut être croissante ou décroissante suivant l'ordre dans lequel se trouvent les 2 premiers termes de la suite

7- FAUX

Contre exemple : $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ est une suite convergente vers 0, strictement positive et $(n)_n$ est une suite de limite $+\infty$ donc non convergente.

8- VRAI

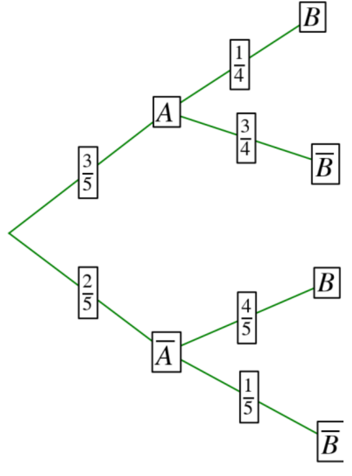
$N = a + 10a + 100a$ est l'écriture d'un tel nombre. Alors $N = a(1 + 10 + 100) = 111a$

Or $111 = 3 \times 37$ donc N est divisible par 37

9- VRAI

La section se fera lorsque la corde du cercle de base est de longueur 8 cm

10- FAUX



$$P_B(A) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} = \frac{P_A(B)\times P(A)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)} = \frac{P_A(B)\times P(A)}{P_A(B)\times P(A) + P_{\overline{A}}(B)\times(1-P(A))} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{47}{100}} = \frac{15}{47}$$

11-

a) VRAI

b) FAUX

Contre exemple : $2x^2 + x + 1 < 0$ alors que $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$

Etourderie : vous vouliez plutôt écrire > 0 ici

12- VRAI

Si (u_n) est bornée et à termes strictement positifs alors il existe m et M deux réels strictement positifs tels que $m \leq u_n \leq M$

$0 < m \leq u_n \leq M \Leftrightarrow 2 < m + 2 \leq u_n + 2 \leq M + 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{m+2} \geq \frac{1}{u_n+2} \geq \frac{1}{M+2}$$

Donc la suite (v_n) est bornée



ADMISSION AU COLLEGE UNIVERSITAIRE
Samedi 2 mars 2013
MATHEMATIQUES
durée de l'épreuve : 3h – coefficient 2

Le sujet est numéroté de 1 à 3.

L'exercice Vrai-Faux est noté sur 8, le problème est noté sur 12.

Les calculatrices sont autorisées.

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur typographique, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence. Si cela le conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il le mentionne explicitement.

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $\frac{4}{5}$, et on pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ pour tout entier naturel non nul n. La suite (S_n) converge vers 5.

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est géométrique.

3) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 1$ et $v_n = e^{-u_n}$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est convergente.

4) Une entreprise de sondage réalise une enquête par téléphone. On admet que la probabilité que la personne contactée accepte de répondre est égale à 0,2.
Si un enquêteur contacte 50 personnes, la probabilité qu'au moins six personnes acceptent de lui répondre est supérieure à 0,95.

5) Toute suite non majorée diverge vers $+\infty$.

6) L'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ admet le réel 1 pour unique solution.

7) On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.

8) L'équation $x^3 + 4x^2 + 4x = -2$ a exactement trois solutions réelles.

9) Voici un algorithme :

```
Entrée
Saisir un entier naturel a
Traitement
Affecter à n la valeur 1 et à c la valeur 1
Tant que c ≤ a
    Affecter à n la valeur n+1
    Affecter à c la valeur c + n²
Fin du Tant que
Sortie
Afficher la valeur de n
```

Si on saisit pour a la valeur 20, alors la sortie vaut 4.

10) On lance deux dés cubiques et non truqués. On appelle X la variable aléatoire donnant le plus grand des deux chiffres obtenus. L'espérance de la variable aléatoire X est : $E(X) = \frac{161}{36}$.

Problème

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$$

et on appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

1) Etudier les variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ ainsi que les limites en 0 et en $+\infty$.

2) Montrer que l'axe des ordonnées du repère et la courbe (Γ) d'équation $y = \ln(\frac{e}{2}x)$ sont asymptotes à la courbe (C).

On rappelle que les courbes (C_1) et (C_2) respectivement représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 sont asymptotes en $+\infty$ si $\lim_{x\to+\infty}\left(f_1(x) - f_2(x)\right) = 0$.

3) a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) < 1$.

b) Etudier le signe de $f(x) - x$ sur $]0 ; +\infty[$ et en déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite d d'équation $y = x$.

4) Tracer la droite d ainsi que les courbes (Γ) et (C) sur le même graphique.

Partie B

On se donne un réel u_0 supérieur ou égal à 1. La suite (u_n) est définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Partie C

On admet que la limite de la suite (u_n) est égale à 1.

On se propose dans cette partie d'étudier la rapidité de convergence de la suite (u_n) vers sa limite.

1) Que peut-on dire de la suite (u_n) quand u_0 vaut 1 ?

2) Dans cette question on choisit la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies à 10^{-6} près de u_1, u_2 et u_3.

On suppose dans la suite de cette partie que le réel u_0 est strictement supérieur à 1.

3) **a)** Montrer que, pour tout réel t strictement supérieur à -1, on a :

$$\ln(1+t) \leq t.$$

b) Montrer que, pour tout réel h positif ou nul, on a :

$$f(1+h)-1=\ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right).$$

c) Montrer que, pour tout réel h positif ou nul, on a :

$$0 \leq f(1+h)-1 \leq \frac{h^2}{2}.$$

4) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} \leq \frac{{v_n}^2}{2}$.

5) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

6) Dans cette question, on choisit à nouveau la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

A partir de quel rang p peut-on affirmer que $u_p - 1 \leq 10^{-20}$?

****

❊ Ex. 1. ./2013/exo-1/texte.tex

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $\frac{4}{5}$, et on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ pour tout entier naturel non nul n. La suite (S_n) converge vers 5.
2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est géométrique.
3) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 1$ et $v_n = \mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est convergente.
4) Une entreprise de sondage réalise une enquête. On admet que la probabilité que la personne contactée accepte de répondre est égale à 0,2.

   Si un enquêteur contacte 50 personnes, la probabilité qu'au moins six personnes acceptent de lui répondre est supérieure à 0,95.
5) Toute suite non majorée diverge vers $+\infty$.
6) L'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$ admet le réel 1 pour unique solution.
7) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2\mathrm{e}^{-x}$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.
8) L'équation $x^3 + 4x^2 + 4x = -2$ a exactement trois solutions réelles.
9) Voici un algorithme :

   ```
   Entrée
   Saisir une entier naturel a
   Traitement
   Affecter à n la valeur 1 et à c la valeur 1
   Tant que c ⩽ a
      Affecter à n la valeur n + 1
      Affecter à c la valeur c + n^2
   Fin du Tant que
   Sortie
   Afficher la valeur de n
   ```

   Si on saisit pour a la valeur 20, alors la sortie vaut 4.
10) On lance deux dés cubiques et non truqués. On appelle X la variable aléatoire donnant le plus gand des deux chiffres obtenus. L'espérance de la variable aléatoire X est : $E(X) = \frac{161}{36}$.

Corrigé de l'exercice 1

1) Comme $q = \frac{4}{5} \neq 1$, pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$S_n = \frac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} = \frac{-1 - \left(-1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{5}} = 5 \times \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^{n}=0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 5\times(-1) = -5.$$

Faux

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+3=2u_n+3+3=2(v_n-3)+3+3=2v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique de raison 2.

Vrai

3) La suite (u_n) est arithmétique de raison $r=1$ et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=1+n$.
Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=\mathrm{e}^{-1-n}$, et la suite (v_n) converge car $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-1-n}=\mathrm{e}^{-1}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$.

Vrai

4) On note X le nombre de personnes qui acceptent parmi les 50 personnes contactées. Nous sommes dans le cadre de l'application de la loi binomiale, car on peut supposer que le nombre de personnes est important pour considérer le tirage comme un tirage (appel d'un personne) avec remise et les tirages indépendants.

$$X\hookrightarrow\mathscr{B}(50\ ;\ 0{,}2).$$

Pour tout $k\in[\![0,50]\!]$ on a $\boxed{p(X=k)=\binom{50}{k}0{,}2^k0{,}8^{50-k}}$.

$$p(X\geqslant 6)=1-p(X=0)-p(X=1)-p(X=2)-p(X=3)-p(X=4)-p(X=5)=1-\sum_{k=0}^{5}\binom{50}{k}0{,}2^k0.8^{50-k}.$$

$$p(X\geqslant 6)=1-0{,}04802\approx 0{,}95198.$$

Vrai

5) Prenons la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n=(-n)^n$. Il est clair que cette suite ne diverge pas vers $+\infty$ car $u_{2n+1}<0$ pour tout $n\ \in\mathbb{N}$ et qu'elle n'est pas majorée, étant donné que $u_{2n}=2^{2n}\times n^{2n}$.
Pour tout $M>0$, on peut trouver $n\in\mathbb{N}^\star$ tel que $u_{2n}>M$. Pour cela il suffit de trouver n tel que $2^{2n}>M$, et $n=\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\ln M}{\ln 2}\right)+1$ convient.

faux

6) Il est clair que 1 est solution car $\ln 1+\ln(2)=0+\ln(2)=\ln(2)$.
Pour l'unicité, on considère la fonction f définie sur l'intervalle $I=]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x+\ln(x+1)$.
La fonction f étant continue sur I, car dérivable sur I et strictement croissante sur I comme somme de deux fonctions $x\longmapsto\ln x$ et $x\longmapsto\ln(x+1)$ strictement croissantes sur I. f est un une bijection de I sur $f(I)=\mathbb{R}$ et l'équation $f(x)=\ln(2)$ admet par suite une unique solution.

Vrai

7) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[2(x+1)-(x+1)^2\right]=(x+1)\times\mathrm{e}^{-x}\times(1-x)$. Et donc $f'(0)=1$, c'est donc faux, car on devait avoir $f'(0)=3$ pour avoir la tangente parallèle à la droite d'équation $y=3x$.

Faux

8) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$. f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

   Et donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$(regarder les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$), et l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

   Faux

9) Exécutons l'algorithme :

n	a	c	test $c \leqslant 20$
1	20	1	oui
2	20	5	oui
3	20	14	oui
4	20	30	non

   Valeur affichée $n = 4$.

   Vrai

10) Il y a équiprobabilité des 36 résultats obtenus pour l'ensemble des couples représentants les deux faces de dés obtenus.

   Vite un tableau :

dé n°2 \ dé n°1	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

   Alors

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36}.$$

   Vrai

Correction Sciences Po 2013e

par Eric DESGRANGES

Merci pour votre solution : je ferai mes commentaires en rouge
Signé : Dany-Jack Mercier

Exercice Vrai-Faux

1) $u_n = u_0 \times q^n$, q étant la raison égale à $\frac{4}{5}$

$= -1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$S_n - q S_n = u_0 q^0 - u_0 q^{n+1} = u_0(1 - q^{n+1})$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} u_0 = \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}$ ✗ Il manque -1 en facteur

$= \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{5}} = 5\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 1\right)$

Nouveau changement de signe injustifié

$\frac{4}{5} < 1$ donc $\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$ tend vers 0 à l'infini

donc S_n tend vers -5

1) Réponse : FAUX

On obtient effectivement -5 mais les calculs donnés montrent 2 erreurs.

2) Pour montrer que (v_n) est géométrique, considérons le rapport

$\left(v_n \neq 0 \text{ puisque } v_n \geq u_0 \geq 0\right)$ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3} = \frac{2u_n+3}{u_n+3} = \frac{u_n + (u_n+3)}{u_n+3} = \frac{u_n}{u_n+3} + 1$

Erreur en remplaçant

La suite (u_n) n'étant pas constante, le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ n'est pas constant, donc ce n'est pas une suite géométrique

2/ Réponse : FAUX ✗

Qui me dit que ce quotient n'est pas constant ?

En fait, on peut vérifier que v est une suite géométrique de raison 2.

3) Il est facile de voir que $v_n = e^{-n}$ ✗ et e^{-n} lorsque n tend vers $+\infty$, alors $-n$ tend vers $-\infty$, et e^{-n} tend vers 0.

3/ Réponse : VRAI

4) Nous reconnaissons une succession de 50 épreuves de Bernoulli indépendantes.

La probabilité qu'il y ait au moins 6 personnes qui acceptent de répondre est égale à la probabilité qu'il y ait au plus $50-6=44$ personnes qui refusent de répondre.

L'événement "Une personne contactée refuse de répondre" a une probabilité de $p=1-0{,}2=0{,}8$

Soit X la variable aléatoire qui compte les personnes qui refusent de répondre, nous recherchons

$$P(X \leq 44) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=44)$$

Cette variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50{,}0{,}8)$ ✗ et la formule

$$P(X=k) = \binom{50}{k} 0{,}8^k (0{,}2)^{n-k}$$

$$k \in \{0,1,\dots,50\}$$

En utilisant la calculatrice et en sommant les 45 probabilités ainsi obtenues, nous aboutissons à

$$P(X \leq 44) = 0{,}951973 \geq 0{,}95$$

4/ Réponse : Vrai

5/ Un contre exemple est la suite de terme $u_n = (-2)^n$ qui n'est pas majorée, et ne tend pas vers $+\infty$.

5/ Réponse : FAUX

6/ Pour que l'équation soit valable il faut que $\begin{cases} x>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow x>0$

Cela suffit-il ?

$$\ln(x)+\ln(x+1) = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(x+1)} = e^{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \times e^{\ln(x+1)} = 2$$

$$\Leftrightarrow x \times (x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-2=0$$

$\Delta = 1+8 = 9 > 0$ Donc l'équation admet 2 solutions

que nous calculons et qui sont -2 et $+1$
Or ~~la~~ condition $x > 0$ implique que nous ne retenions que la solution 1.

6/ Réponse : VRAI

OK

7/ La dérivée de f existe sur $\mathbb{R}$ car f est composée du produit de 2 fonctions dérivables (1 fonction polynôme qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$).

TB

Si f admet une tangente au point d'abscisse 0 ~~~~ qui ~~$f'(0)$ est~~ est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$, alors $f'(0)$ doit être égal au coefficient directeur 3.

Essayons de le vérifier :

$$f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$$
$$= e^{-x}(2x+2-(x^2+2x+1))$$
$$= e^{-x}(2x+2-x^2-2x-1)$$
$$= e^{-x}(-x^2+1)$$

$$f'(0) = 1 \neq 3$$

7/ Réponse : FAUX

OK

8/ Je calcule le Δ ? de cette équation avec ma calculatrice et je trouve que $\Delta = -44 < 0$

L'équation a 3 racines, 1 réelle pure et 2 complexes conjuguées.

L'étude des variations de f montre en effet que le résultat annoncé est faux.

8/ Réponse : FAUX

Je ne sais pas qui est delta ! Je refuse donc cette preuve. L'utilisation d'un discriminant d'un polynôme f(x) de degré 3 n'est pas au programme de terminale, et se voit peu en fait, même après. Il faut proposer une autre solution en étudiant tout simplement les variations de la fonction f.

9/ Voici le tableau des valeurs prises par les variables n et c à chaque itération :

itération	n	c
1	2	$1+4=5$
2	3	$5+3^2=14$
3	4	$14+4^2=30 > 20$

TB

Donc l'algorithme s'arrête alors que $n=4$.

9/ Réponse : VRAI

10/ Soit E l'ensemble des numéros des faces d'un dé $= \{1,2,3,4,5,6\}$

Alors nous considérons l'univers $\Omega = E^2$ muni de la loi d'équiprobabilité

$p = \frac{1}{36}$ car les dés ne sont pas truqués et card $\Omega = 6^2 = 36$

p étant fixé, considérons les couples ~~quelconque~~ $(p,q) \in \Omega$

* Il y a $p-1$ couples possibles tels que $1 \leq q < p$
* Il y a 1 couple possible tel que $q = p = 1$
* Il y a $p-1$ couples possibles tels que $1 < p < q$

X

Donc $2p-1$ couples possibles dont la valeur de X prend p

$P(X=p) = \frac{2p-1}{36}$ $p \in \{1,2,\dots,6\}$ qui est l'ensemble image de X.

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} \frac{2i-1}{36} \times i = \frac{1}{36} \times 1 + \frac{3}{36} \times 2 + \dots + \frac{11}{36} \times 6$

$= \frac{161}{36}$

Juste

Idée juste, mais c'est mal exprimé. En fait vous dénombrez les couples qui s'écrivent (p,q) avec 1<=q<p et vous en trouvez p-1, puis vous dénombrez les couples (q,p) avec toujours 1<=q<p pour en trouver encore p-1. Ensuite, c'est comme vous dites : il y a en tout 2p-1 couples tels que X=p, et on conclut comme vous faites.

10/ Réponse : VRAI

C'est effectivement vrai

Problème

Partie A

1) Sur $]0,+\infty[$ $f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right)$

$$f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 1 - \ln 2 + \ln\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{f(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 - \ln 2}$$

Calculons sa dérivée, qui existe sur $]0,+\infty[$, puisque x, $\frac{1}{x}$, et $\ln$ sont dérivable sur leurs ensembles de définition et $]0,+\infty[$ est inclue dans ~~chaque~~ chacun de ces ensembles de définition.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \times \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x}{x^2+1} \times \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$$;

Étudions son signe :

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} \geq 0$$

$\iff$ ① $x^2 - 1 \geq 0$ et $x(x^2+1) \geq 0$

ou ② $x^2 - 1 \leq 0$ et $x(x^2+1) \leq 0$

et ceci toujours avec la condition initiale $x \in]0,+\infty[$ OK

Dans ① : $\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$, $\begin{cases} x(x^2+1) \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x^2+1 \geq 0$ toujours vrai

X

Donc ① $\Rightarrow$ $x \geq 1$

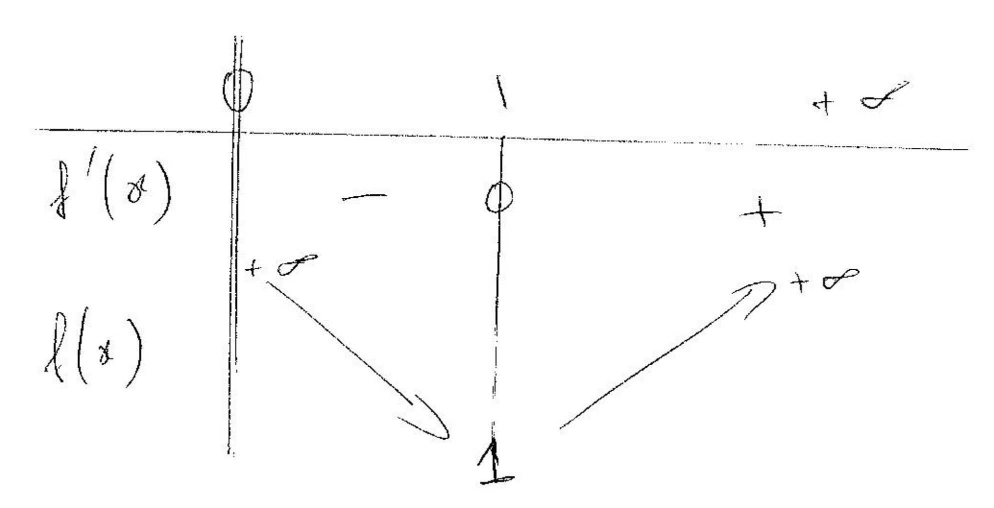
Hum ! On a besoin d'une équivalence ici

② $\begin{cases} x^2 \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1$, $\begin{cases} x(x^2+1) \leq 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow$ est impossible OK

Nous nous retrouvons donc avec

sur $]0,+\infty[$ $\quad f'(x) \geq 0 \iff x \geq 1$

D'où le tableau de variation suivant :



$f(1) = \ln(1+1) + 1 - \ln 2$
$= \ln 2 + 1 - \ln 2$
$= 1$

Lorsque x tend vers 0^+, $\frac{1}{x} \to +\infty$ et donc
$u(x) = x + \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, $\ln(u)$ tend vers $+\infty$

Lorsque x tend vers $+\infty$, alors $\frac{1}{x} \to 0$ et donc
$u(x) = x + \frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, $\ln(u)$ tend vers $+\infty$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ OK

2) En utilisant $f_1(x) = f(x)$ et $f_2(x) = \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ qui est représentée par la courbe T, nous calculons

$f_1(x) - f_2(x) = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 - \ln 2$
$- \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$
$= \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 - \ln 2 - \ln e + \ln 2 - \ln x$
$= \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) - \ln x = \ln\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{x}\right)$

$$f_1(x) - f_2(x) = \ln\left(\frac{x + \frac{1}{x}}{x}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$ OK

Lorsque $x \to +\infty$ $\frac{1}{x^2} \to 0$ donc

$$f_1(x) - f_2(x) \to \ln(1) = 0$$

– Ce qui prouve que (Γ) est asymptote de (C) en $+\infty$. Juste

En ce qui concerne la démonstration que (Γ) est asymptote à l'axe des ordonnés $(x = 0)$, nous avons vu précédemment que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, ce qui prouve que (Γ) et l'axe des ordonnés ~~=~~ sont bien asymptotes en 0^+ TB

3/ a) Dire que $f'(x) < 1$ $(x \in]0, +\infty[)$

revient à dire que :

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2+1)} < 1$$

cad $x^2 - 1 < x(x^2+1)$ car $x(x^2+1) > 0$

soit $x^2 - 1 < x^3 + x$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + x + 1 > 0$

Posons $P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

et sa dérivée : $P'(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$P'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 \geq 0$

~~$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x \geq -1$~~

~~$\Leftrightarrow x(3x-2) \geq -1$~~

$\Delta = 4 - 4 \times 3 < 0$

Donc $P'(x)$ est du signe de 3, soit $P'(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ce qui revient à dire que $P(x)$ est strictement croissante, en particulier sur $]0,+\infty[$

$P(0) = 1$ donc $\forall x \in]0,+\infty[\quad P(x) > 1$

TB Donc $P(x) > 0$ ce qui était une condition nécessaire et suffisante pour que $f'(x) < 1$

Donc $\underline{\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) < 1}$

3/b) Posons $g(x) = f(x) - x$ sur $]0,+\infty[$

La dérivée de g existe et

$g'(x) = f'(x) - 1$

Or nous venons de voir précédemment que $f'(x) < 1$

Donc $g'(x) < 0$

Donc $g(x)$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
	‖	$+\infty$ ↘	0	↘	
$g(x) = f(x) - x$	‖	$+$		$-$	

~~g(0)~~ Lorsque x tend vers 0, $x \to 0$ et $f(x) \to +\infty$ (vu en 1)

~~donc $g(x) \to$~~

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

$g(1) = \underbrace{f(1)}_{=1 \text{ (vu précédemment)}} - 1 = 1 - 1 = 0$

Du fait que $g(x)$ ~~soit~~ est strictement décroissante et qu'elle s'annule en 1, nous en déduisons son signe : $x \in]0,1[\quad f(x) - x > 0$

$x \in]1,+\infty[\quad f(x) - x < 0$

Si $x \in]0,1[$ alors $f(x) - x > 0$

$\iff f(x) > x$

Les points de la courbe (C) sont donc "au dessus" de la droite d'équation $y = x$

Si $x \in]1, +\infty[$ alors $f(x) - x < 0$

$\iff f(x) < x$

TB

Les points de la courbe (C) sont donc "au dessous" de la dte d'équation $y = x$

Si $x = 1$ alors $f(x) - x = 0$

La courbe (C) et la dte d'équation se rejoignent au point $(1,0)$.

4)

OK

PARTIE B

1) Démontrons le par récurrence.

Au rang 0 : $u_0 \geq 1$ ~~donc~~

Au rang 1 : $u_1 = f(u_0)$

u_0 étant supérieur à 1, $u_0 \in]0, +\infty[$

et $f(u_0) \geq 1$ (démontré précédemment pour tout $x \in]0, +\infty[$)

donc $u_1 \geq 1$

Considérons maintenant qu'au rang n, on ait

$\begin{cases} u_{n-1} \text{ ~~est supérieur à~~ } \geq 1 \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ ~~est~~ } \geq 1 \end{cases}$

alors calculons $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \geq 1$ d'après l'hypothèse précédente, donc $f(u_n) \geq 1$

donc $\begin{cases} u_n \geq 1 \\ f(u_n) = u_{n+1} \text{ est supérieur ou égal à 1} \end{cases}$

CQFD.

OK

Donc $\forall n \quad u_n \geq 1$, la suite (u_n) est donc minorée par 1

2) Nous avons vu en 3/b que

$\forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) \leq x$

c.a.d $\forall n \in \{1, 2, \ldots\} \quad f(u_n) \leq u_n$

et $f(u_{n+1}) \leq u_{n+1}$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$

donc $f(u_{n+1}) \leq u_{n+1} \leq u_n$

TB

donc $u_{n+1} \leq u_n$

donc la suite est décroissante

3) Une suite décroissante et minorée converge. CQFD. Oui !

PARTIE C

1) $u_0 = 1$

$u_1 = f(u_0) = f(1) = 1$ (vu précédemment)

Par récurrence, il est clair que $\forall n \quad u_n = 1$

Donc la suite est constante de valeur 1 Oui

2) $u_0 = \frac{3}{2}$

$u_1 = 1,080\ 042$

$u_2 = 1,002\ 961$ OK

$u_3 = 1,000\ 004$

3) $u_0 > 1$

3) a) soit $u(t) = \ln(1+t) - t \qquad t \in]-1, +\infty[$

$u'(t) = \frac{1}{1+t} - 1$

$u'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+t} \geq 1 \Leftrightarrow 1+t \leq 1$

$\Leftrightarrow t \leq 0$

Donc $u(t)$ est croissante sur $]-1, 0[$

et décroissante sur $]0, +\infty[$

Elle atteint son maximum en $u(0) = \ln(0+1) - 0 = 0$

TB

Donc $\forall t \in]-1, +\infty[\quad u(t) \leq 0$

Donc $\ln(t+1) \leq t$

3/b/ $\forall h \in [0, +\infty[$

$$f(1+h) - 1 = \ln\left(1+h+\frac{1}{1+h}\right) + 1 - \ln 2 - 1$$

$$= \ln\left(\frac{(1+h)^2+1}{1+h}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{1+2h+h^2+1}{1+h}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{h^2+2h+2}{1+h}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{h^2+2(h+1)}{1+h}\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{h^2}{1+h} + 2\right) - \ln 2$$

$$= \ln\left(\frac{2+\frac{h^2}{1+h}}{2}\right)$$

Oui

$$= \ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right)$$

3/c/ En appliquant 3/2 puis 3/1

$$f(1+h) - 1 = \ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right) \leq \frac{h^2}{2(h+1)}$$

Or $h \geq 0 \Rightarrow 2(h+1) \geq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(h+1)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{2(h+1)} \leq \frac{h^2}{2(h+1)}$$

Donc $f(1+h) - 1 \leq \frac{h^2}{2(h+1)}$

En ce qui concerne la démonstration que $f(1+h) - 1 = \ln\left(1+\frac{h^2}{2(h+1)}\right)$ est supérieur ou égale à 0, c'est évident car $\frac{h^2}{2(h+1)} > 0 \Rightarrow \ln(1+ \dots) \geq 0$

Exact

4/ $v_n = u_n - 1$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1$

$= f(u_n) - 1$

$= f(v_n + 1) - 1$

Or d'après 3/c et $v_n > 0$, le résultat de la partie B/1 implique que : $f(1+v_n) - 1 \leq \frac{v_n^2}{2}$

Soit $v_{n+1} \leq \frac{v_n^2}{2}$ Oui

5/ On a bien $v_n \geqslant 0$.
Il nous reste à démontrer que $v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$,
ce que nous allons faire par récurrence.

Au rang $n=1$ $2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}} = 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^0} = v_1$

et $v_1 \leq v_1$ CQFD

Maintenant, si la relation $v_n \leq 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$ est vraie au rang n, montrons qu'elle est aussi vraie au rang $n+1$:

D'après 4/ $v_{n+1} \leq \frac{v_n^2}{2}$

et donc, d'après l'hypothèse du rang n :

$$v_{n+1} \leq \frac{\left(2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}\right)^2}{2}$$

La partie de droite de l'inéquation est égale à $\frac{4\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^n}}{2}$

$= \frac{\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^n}}{2}$ TB

Soit $v_{n+1} \leq \frac{\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^n}}{2}$ CQFD.

6/ $u_p - 1 \leq 10^{-20}$

X $\Rightarrow v_p \leq 10^{-20}$

Danger : en oubliant d'écrire une équivalence ici, on peut vous enlever tous les points car vous raisonnez ensuite avec vp.

Nous avons vu précédemment que pour $u_0 = \frac{3}{2}$

$u_1 = 1{,}080\,042$ à 10^{-6} près

soit $v_1 = 0{,}080\,042$ à 10^{-6} près

soit $v_1 \leq 10^{-1}$ et même $v_1 \leq 2 \times 10^{-1}$

Donc $2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}} \leq 2\left(\frac{2\times 10^{-1}}{2}\right)^{2^{n-1}}$

X c.a.d inférieur à $2\left(10^{-1}\right)^{2^{n-1}}$

ou $2(10^{-2})^{n-1}$

A revoir : il ne s'agit pas de la même expression ! Regardez quand n=4...

Recherchons p tel que

$2 \times (10^{-2})^{p-1} \leq 10^{-20}$

$\Rightarrow (10^{-2})^{p-1} \leq 10^{-20}$

$\Rightarrow -2^{p-1} \leq -20$

Prenons $p = 5$ $\quad -2^{5-1} = -16$

$p = 6$ $\quad -2^{6-1} = -32$

On peut donc choisir $p = 6$.